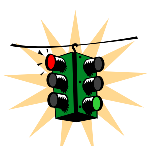
INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

Propósitos

- Identificar las operaciones algebraicas que convierten una integral a una forma inmediata (cambio de variable).
- Utilizar las tablas de integrales inmediatas para cambio de variable.
- Identificar las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.
- Mejorar el desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.

Sugerencias para quien imparte el curso

Aunque la sustitución trigonométrica para obtener la integral de ciertas funciones, no está específicamente en el programa de estudios, es recomendable que al alumno sepa que existe estén otros métodos de integración, este es uno de ellos.

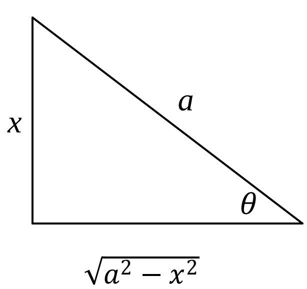
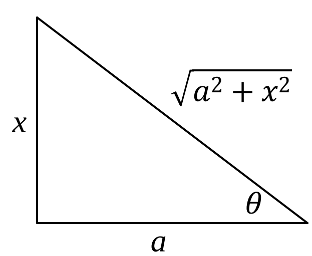
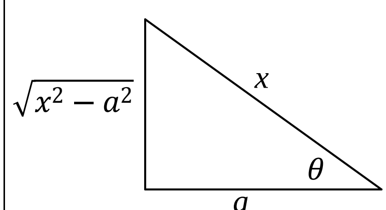


Conceptos clave:

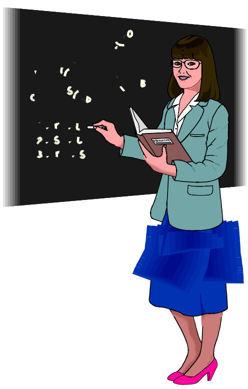
Si un integrando contiene expresiones de los tipos:

a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ b) $\sqrt{a^2 + x^2}$ c) $\sqrt{x^2 - a^2}$

Donde a es una constante mayor que cero. Es posible apoyarse en el triangulo rectángulo y el teorema de Pitágoras para hacer las sustituciones siguientes.

<table>
<tr><td>Caso 1: $\sqrt{a^2 - x^2}$</td><td>Caso 2: $\sqrt{a^2 + x^2}$</td><td>Caso 3: $\sqrt{x^2 - a^2}$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>40. $\boldsymbol{x = a\, sen\, \theta}$</td><td>41. $\boldsymbol{x = a \tan \theta}$</td><td>42. $\boldsymbol{x = a \sec \theta}$</td></tr>
</table>

Puntos problemáticos
Los alumnos pudieran no recordar cómo se definen las funciones trigonométricas, es recomendable que quien imparte el curso, se asegure de que los alumnos conocen lo anterior.



Ejemplo 1

Obtener

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

Donde $a > 0$, de acuerdo con el caso 1, $x = a\ sen\ \theta$

Entonces $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1-sen^2\theta)}$

$$= a\sqrt{1-sen^2\theta} = a\ cos\ \theta$$

Como $x = a\ sen\ \theta.\ dx = a\ cos\ \theta\ d\theta$. Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{(a^2sen^2\ \theta\ )\ a\ cos\ \theta}(acos\ \theta\ d\theta)$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{(sen^2\ \theta\ )}d\theta = \frac{1}{a^2}\int csc^2\theta d\theta = -\frac{1}{a^2}cot\theta + C$$

Se debe regresar la integral obtenida $-\frac{1}{a^2}cot\theta + C$ a la variable de integración original. Haciendo uso del triangulo del caso 1, $cot\theta = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, de esta forma la integral obtenida es:

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$$

Sugerencias para quien imparte el curso

Dependiendo de las características el grupo se pudieran hacer algunos ejemplos dando un valor a la constante a, tales como 1, 4, 9, etc y después generalizarlo.

Ejemplo 2

Obtener

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx$$

Donde $a > 0$, de acuerdo con el caso 2, $x = a\ tan\ \theta$, por tanto $dx = a\ sec^2\ \theta\ d\theta$

Entonces $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+tan^2\theta)}$

$$= a\sqrt{1+tan^2\theta} = a\ sec\ \theta$$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \int \frac{1}{(a\ sec\ \theta\ )}(a\ sec^2\ \theta\ d\theta)$$

$$= \int \sec\theta\ d\theta = ln|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

De acuerdo con el triángulo del caso 2, $\sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. Entonces:

$$= \int \sec\theta\ d\theta = ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\mathrm{a}} + \frac{x}{a}\right| + C$$

Después de hacer algunas operaciones algebraicas, el resultado puede escribirse como:

$$\int \sec\theta\ d\theta = ln\left|\sqrt{a^2+x^2} + x\right| + C$$

Sugerencias para quien imparte el curso

Nuevamente, dependiendo de las características el grupo, se pueden proponer algunos ejemplos dando un valor a la constante a, tales como 1, 4, 9, etc y después generalizarlo.

Ejemplo 3

Obtener

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx$$

Donde $a > 0$, de acuerdo con el caso 3, $x = a\ sec\ \theta$, por tanto $dx = a\ sec\ \theta \tan\theta\ d\theta$

Entonces $\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta + 1)}$

$$= a\ tan\,\theta$$

Sustituyendo en la integral

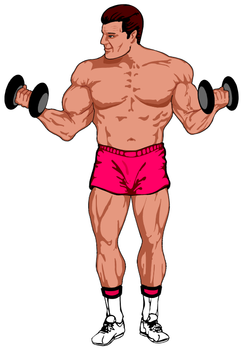
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \int \frac{a\ tan\,\theta}{(a\ sec\ \theta\ )} (a\ sec\ \theta \tan\theta\ d\theta)$$

$$= a \int tan^2\theta\ d\theta = a \int (sec^2\theta - 1) d\theta = a\ (tan\theta - \theta)$$

Como $x = a\ sec\ \theta$, entonces $sec\ \theta = \frac{x}{a}$ y $\theta = sec^{-1}\left[\frac{x}{a}\right]$, entonces:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = a\left[\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} - sec^{-1}\left[\frac{x}{a}\right]\right] + C$$

$$= \left[\sqrt{x^2 - a^2} - a\ sec^{-1}\left[\frac{x}{a}\right]\right] + C$$



Ejercicios

Obtén las siguientes integrales ocupando sustitución trigonométrica

1. $\int \frac{1}{x\sqrt{9+x^2}}\,dx$

2. $\int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

3. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,dx$

4. $\int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x}\,dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,dx$

6. $\int \frac{1}{x^2\sqrt{4-x^2}}\,dx$

7. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$