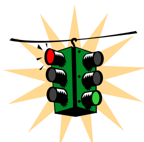
INTEGRACIÓN POR PARTES

Propósitos

- Reconocer que el método de integración por partes amplía las posibilidades de integrar productos de funciones y saber que se desprende de la derivada de un producto.
- Utilizar el método de integración por partes.

Sugerencias para quien imparte el curso

Asegurase de que los alumnos comprendan como es que se llega a la fórmula de derivación por partes, mediante la derivada del producto de funciones.



Conceptos clave:

Cuando se trata de integrar por cambio de variable y la variable original no se elimina, se puede usar otro método de integración que es el de integración por partes. Así como el método de cambio de variable se apoyaba en la regla de la cadena para las derivadas, la integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones.

Sean dos funciones tales que $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la derivada del producto de estas funciones está dada por

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

en forma diferencial

$$d(uv) = udv + vdu$$

Despejando

$$udv = d(uv) - vdu$$

Integrando

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

43. Finalmente la fórmula para integración por partes puede escribirse

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Sugerencias para quien imparte el curso

Una vez que el profesor ha resuelto algunos ejercicios para que los alumnos se familiaricen con el método de integración por partes, conviene plantear otros ejercicios para que sean resueltos en parejas, planteando algunas preguntas por ejemplo ¿Qué pasaría si se eligiera u y dv distintos? Que los alumnos traten de obtener las integrales para que observen que pasa.

Ejemplo 1

Obtener

$$\int x\, e^x dx$$

Vemos que si quisiéramos usar el método de cambio de variable ya sea que se eligiera $u = x$ o $u = e^x$, al obtener du no se tiene un resultado que nos lleve a resolver la integral.

Usando el método de integración por partes haciendo $u = x$ y $dv = e^x dx$, entonces:

$$du = dx$$

$$v = \int dv = \int e^x dx = e^x + C$$

Aplicando la fórmula para la integración por partes

$$\int x\, e^x dx = uv - \int vdu$$
$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$
$$= e^x(x - 1) + C$$

Si se hubiera elegido como $u = e^x$ y $dv = xdx$, la integral se complica, se requerirá de hacer algunos ejercicios antes de poder elegir adecuadamente.

Ejemplo 2

Obtener

$$\int x\, sen\, x\, dx$$

Vemos que si quisiéramos usar el método de cambio de variable ya sea que se eligiera $u = x$ o $u = sen\, x$, al obtener du no se tiene un resultado que nos lleve a resolver la integral.

Usando el método de integración por partes haciendo $u = x$ y $dv = sen\, x\, dx$, entonces:

$$du = dx$$

$$v = \int dv = \int sen\, x\, dx = -\cos x + C$$

Aplicando la fórmula para la integración por partes

$$\int x\, sen\, x\, dx = uv - \int vdu$$
$$= -xcos\, x + \int \cos x\, dx = -xcos\, x + sen\, x + C$$

Sugerencias para quien imparte el curso

Plantear ejercicios que involucren hace integración por partes dos o más veces y hacer preguntas a los alumnos de cómo podrían resolver esas integrales

Ejemplo 3

Obtener

$$\int e^x\, sen\, x\, dx$$

Usando el método de integración por partes haciendo $u = e^x$ y $dv = sen\, x\, dx$, entonces:

$$du = e^x dx$$

$$v = \int dv = \int sen\ x\ dx = -\cos x + C$$

Aplicando la fórmula para la integración por partes

$$\int e^x\ sen\ x\ dx = uv - \int vdu$$
$$= -e^x cos\ x + \int e^x \cos x\, dx$$

¿Cómo podría resolverse la integral que resulta?

Como se puede observar para obtener la integral, se debe aplicar también integración por partes, de esta forma $u =\ e^x$

$$du = e^x dx$$

$$v = \int dv = \int cos\ x\ dx = \operatorname{sen} x + C$$

Aplicando la fórmula para la integración por partes

$$\int e^x\ cos\ x\ dx = uv - \int vdu$$

$$= e^x sen\ x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx$$

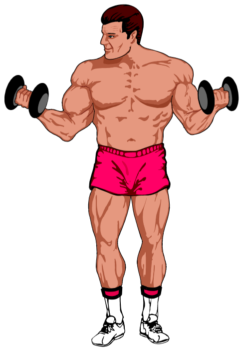
De tal forma que

$$\int e^x\ sen\ x\ dx = -e^x cos\ x + \int e^x \cos x\, dx = -e^x cos\ x + e^x sen\ x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx + C$$

¿Qué se podría hacer en esta parte?
¿Cómo es la ultima integral que resulta con respecto a la integral que se desea obtener?

Asociado términos semejantes

$$2\int e^x\ sen\ x\ dx = -e^x cos\ x + e^x sen\ x + C$$
$$= \frac{e^x}{2}(sen\ x - \cos x) + C$$



Ejercicios

Obtén las siguientes integrales ocupando el método de integración por partes. En algunos casos sigue las recomendaciones sugeridas, haz uso de cambio de variable cuando sea necesario.

1. $\int x sen\ 3x dx$
2. $\int x sec\ 2x \tan 2x\ dx$
3. $\int \sqrt{x} ln x\ dx$
4. $\int x^3 sen\ (x^2) dx$ (Sugerencia: $x^3 = x^2 x$ de tal forma que la integral puede

   quedar como: $\int x^2 x\ sen\ (x^2) dx$
5. $\int x^2 sen\ 4x dx$ (Se Deberá integrar dos veces por partes)
6. $\int 3x^2 e^x dx$ (Se Deberá integrar dos veces por partes)
7. $\int (x+2)(x+4)^3 dx$