LA INTEGRAL

Propósitos

- Utiliza la condición inicial del problema para encontrar la solución particular.
- Identifica que al modificarse la condición inicial, las funciones encontradas difieren en una constante.
- Conoce la relación que existe entre la antiderivada y la integral indefinida.

Sugerencias para quien imparte el curso

Comenzar con un problema introductorio en donde se utilicen condiciones iniciales para ir obteniendo los valores de las constantes involucradas. Se recomienda hacer esta actividad en equipos para que al final presenten al grupo sus conclusiones.

El problema de los frenos. Una compañía está probando los frenos de los automóviles que fabrica, el control de calidad es muy estricto, el auto circula sobre suelo seco, el tiempo de frenado comienza a partir de que el conductor pisa el freno.

La distancia máxima de frenado debe ser de 37 mts, en otro caso, se deberá cambiar completamente el sistema de frenado, el ingeniero a cargo y todo su personal perderán el empleo

Se sabe que el auto tiene una desaceleración de $a(t) = -7t$, y los frenos deben aplicarse cuando el auto alcance una velocidad de 80km/h o 22.2m/s.

¿Qué distancia recorre el automóvil antes de detenerse?

La velocidad inicial del auto es 22.2 m/s, está es, v_0. Como el auto desacelera entonces $a(t) = -7t$

Sabemos que la antiderivada de $a(t)$, es $v(t)$, por lo tanto:

$$v(t) = -\frac{7}{2}t^2 + C,$$

considerando *C* como v_0, entonces, $v(t) = -\frac{7}{2}t^2 + v_0$;

$$v(t) = -\frac{7}{2}t^2 + 22.22$$

Cuando el auto se detiene su velocidad es cero, de esta forma

$$0 = -\frac{7}{2}t^2 + 22.22$$

Despejando $t = 2.52s$

Para calcular la distancia recorrida por el auto en ese tiempo, obtenemos la antiderivada de $v(t)$, por tanto,

$$s(t) = -\frac{7}{6}t^3 + 22.22t + C$$

considerando *C* como s_0, que es la posición inicial, $s(t) = -\frac{7}{6}t^3 + 22.22t + s_0$. Para este caso cuando $t = 0$, $s_0 = 0$ entonces

$$s(t) = -\frac{7}{6}t^3 + 22.22t$$

En $t = 2.52$, $s(2.52) = -\frac{7}{6}(2.52)^3 + 22.22(2.52)$

La distancia que el auto recorre hasta detenerse es: 37.32mts.

¿Qué acciones debe tomar la compañía?

Sugerencias para quien imparte el curso

Hacer que los alumnos trabajen en este u otro problema y que varíen las condiciones iniciales, por ejemplo, la velocidad.

El problema de la altura de la barranca. Unos geólogos desean calcular la altura de una barranca, al fondo pasa un rio, esto les permitirá tener una idea, aunque no exacta de la antigüedad de la misma, se sabe que conforme pasan los años los ríos arrastran sedimentos y rocas haciendo cada vez más profunda la barranca, tal es el caso del cañón El Colorado y otros.

Los geólogos dejan caer una piedra y ésta tarda en caer 7 segundos, ¿que profundidad tiene la barranca?

Considerar la aceleración de la gravedad como 9.8m/s^2.

Conceptos clave:

5. Cuando se especifican ciertas condiciones iniciales para $F(x)$, es posible conocer el valor de la constante *C*, es decir, si se conocen los valores a y b, tales que $F(a)+C=b$, entonces se despeja para obtener el valor de .*C,* esto es: $C=b-F(a)$

6. Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces existen una infinidad de antiderivadas que tienen la forma $F(x)+C$, donde C es un número real no especificado.

7. El conjunto infinito de antiderivadas es lo que se nombra como *integral indefinida*. De este modo si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces la integral indefinida de $f(x)$ es igual a $F(x)+C$.

La notación utilizada para expresar lo anterior es:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Donde C es la *constante de integración*, $f(x)$ es el *integrando* y x *la variable de integración*.

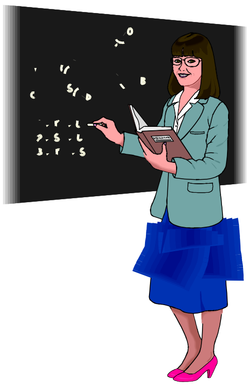
8. Al símbolo $\int$ se denomina signo integral y a dx indica que x es la variable de integración y se le llama diferencial de x.

9. La integral indefinida de f es una antiderivada. Al proceso de encontrar la función F a partir de una f dada, se le conoce como integración indefinida.

La regla de las potencias para la integral indefinida es:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

Donde n es un número racional y $n \neq -1$.



Ejemplo 1

La integral indefinida de $f(x) = 9x^4$, se escribe:

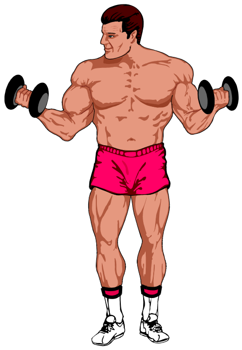
$$\int 9x^4 dx = \frac{9}{5}x^5 + C$$

Ejemplo 2

$$\int 3t^2 dt = \frac{3}{2}t^3 + C$$

La integración es la operación inversa a la derivación.

Puntos problemáticos
Algunos alumnos pueden tener problemas con la notación, ya que es la primera vez que usan el símbolo $\int$, afortunadamente en la mayoría de los casos no presenta un gran problema, se recomienda dejar ejercicios de tarea y para que realicen en el salón.



Ejercicios

1. En un laboratorio una partícula se mueve con aceleración $a(t) = 10t - 1$, encontrar $s(t)$ suponiendo que la condiciones iniciales son $v(0) = 3$ y $s(0) = 12$
2. Si un cuerpo en caída libre tiene una aceleración $a(t) = g$, encontrar una función general para determinar la velocidad del objeto en cualquier tiempo t, es decir, $v(t)$, posteriormente encontrar una función general para la distancia $s(t)$.
3. En el problema de la altura de la barranca si se lanza una piedra hacia arriba con una velocidad de 10m/s, despreciando la fricción del aire, ¿Cuál es la altura de la piedra t segundos después? ¿Cuánto tarda la piedra en alcanzar la altura máxima? ¿en qué momento y con qué velocidad llega la piedra al fondo de la barranca?
4. Se deja caer una moneda desde lo alto de un edificio, despreciando la fricción del aire, si la moneda tarda en llegar al suelo 3 segundos, ¿qué altura tiene el edificio?
5. La pendiente de la recta tangente a un punto $p(x, y)$ es $f'(x) = \frac{1}{3}x^2$, sabiendo que la curva de la función pasa por el punto $(1, \frac{7}{9})$, determinar la función.
6. En el ejercicio 5, ¿cuál sería la función buscada si $f(2) = 1$?
7. Encontrar la integral indefinida de las siguientes funciones, usando la notación con el símbolo $\int$

   a) $f(x) = 2x$
   b) $f(x) = x^3$
   c) $f(t) = 5t^{\frac{1}{3}}$
   d) $f(x) = -5x^{-2}$
   e) $f(x) = 14x^3 - x^{-2}$