CONCEPTOS CLAVE DE LA UNIDAD 2

1. Si f y F son funciones de x, tales que $F'(x)=f(x)$, entonces se dice que F es antiderivada de f. Siempre que $f(x)$ esté definida.

Algunas veces a la antiderivada, se le llama función primitiva.

2. Si F_1 y F_2 son antiderivadas de f, entonces difieren a lo más en una constante.

En general, si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces también lo es $F(x)+C$, donde **C** puede ser cualquier número real.

A la antiderivada $F(x)+C$, se le conoce como la antiderivada más general.

3. La antiderivada más general de F de $f(x)=ax^n$, donde n es un numero racional ($n \neq -1$), está dada por

$$F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1}\text{+C}$$

4. Si $f_1(x)=a_1x^{n_1}$ y $f_2(x)=a_2x^{n_2}$ donde a_1 y a_2 son dos constantes cualesquiera y n_1 y n_2 son números racionales $n_1\, y\, n_2 \neq -1)$ y si $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$. entonces

La antiderivada más general $F(x)$ de $f(x)$ es:

$$F(X) = \frac{1}{n_1+1}a_1x^{n_1-1} + \frac{1}{n_2+1}a_1x^{n_2-1} + C; \quad C = C_1 + C_2$$

En general, tal como en la suma de derivadas, la antiderivada de una suma de funciones, es igual a la suma de sus antiderivadas

5. Cuando se especifican ciertas condiciones iniciales para $F(x)$, es posible conocer el valor de la constante *C*, es decir, si se conocen los valores a y b, tales que $F(a)+C=b$, entonces se despeja para obtener el valor de .*C,* esto es: $C=b-F(a)$

6. Si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces existen una infinidad de antiderivadas que tienen la forma $F(x)+C$, donde C es un número real no especificado.

7. El conjunto infinito de antiderivadas es lo que se nombra como *integral indefinida*. De este modo si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces la integral indefinida de $f(x)$ es igual a $F(x)+C$.

La notación utilizada para expresar lo anterior es:

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

Donde C es la *constante de integración*, $f(x)$ es el *integrando* y x *la variable de integración*.

8. Al símbolo $\int$ se denomina signo integral y a dx indica que x es la variable de integración y se le llama diferencial de x.

9. La integral indefinida de f es una antiderivada. Al proceso de encontrar la función F a partir de una f dada, se le conoce como integración indefinida.

La regla de las potencias para la integral indefinida es:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

Donde n es un número racional y $n \neq -1$.

10. Una regla de integración es

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)dx$$

Donde k es un número real cualquiera

11. Como la antiderivada de una suma de funciones es igual a la suma de las antiderivadas, usando la notación de integral indefinida se puede expresar como:

$$\int \left[f(x)+g(x) \right] dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Las integrales inmediatas de las funciones exponenciales y logarítmicas, se listan a continuación:

12. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$ **13.** $\int e^x dx = e^x + C$ **14.** $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln|a|}+C$

Las integrales inmediatas de las funciones trigonométricas

15. $\int senx dx = -\cos x + C$,

16. $\int \cos x dx = senx + C$

17. $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C = \ln \sec x + C$

18. $\int \cot x dx = \ln senx + C$

19. $\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

20. $\int \csc x dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

21. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

22. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

23. $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

24. $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

Si $\int f(x)dx = F(x) + C$, entonces $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$

25. Aplicando la regla de la cadena la derivada de $F(g(x)) + C$ y ya que $F' = f$:

a) $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

La fórmula de integración por tanto

b) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$

26. Si $u = g(x)$, derivando con respecto a x, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, obteniendo la diferencial $du = g'(x)dx$ y sustituyendo en la fórmula de integración b), tenemos:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

La integral se obtiene con la formula ya antes vista

$$\int f(u)du = \int u^r du = \frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$$

Para integrales exponenciales y logarítmicas:

27. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

28. $\int e^u du = e^u + C$

29. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln|a|} + C$

Para las funciones trigonométricas, donde u es función de x, $u = g(x)$

30. $\int senu du = -\cos u + C$

35. $\int \csc u du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

31. $\int \cos u du = sen u + C$

32. $\int \tan u du = -\ln \cos u + C = \ln \sec u + C$

33. $\int \cot u du = \ln sen u + C$

34. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

36. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$

37. $\int \csc^2 u du = -\cot u + C$

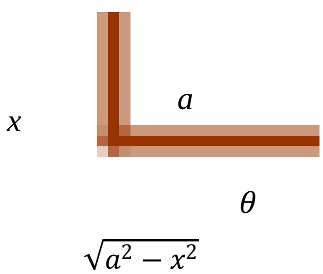
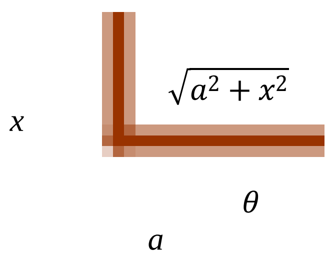
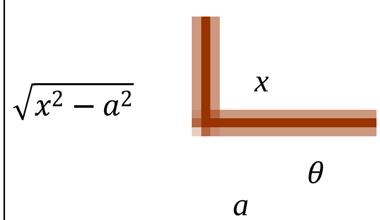
38. $\int \sec u \tan u du = \sec u + C$ **,**

39. $\int \csc u \cot u du = -\csc u + C$

Si un integrando contiene expresiones de los tipos:

a) $\sqrt{a^2 - x^2}$ b) $\sqrt{a^2 + x^2}$ c) $\sqrt{x^2 - a^2}$

Donde a es una constante mayor que cero. Es posible apoyarse en el triangulo rectángulo y el teorema de Pitágoras para hacer las sustituciones siguientes.

Caso 1: $\sqrt{a^2 - x^2}$	Caso 2: $\sqrt{a^2 + x^2}$	Caso 3: $\sqrt{x^2 - a^2}$
		
40. $\boldsymbol{x = a\, sen\, \theta}$	**41.** $\boldsymbol{x = a \tan \theta}$	**42.** $\boldsymbol{x = a \sec \theta}$

Cuando se trata de integrar por cambio de variable y la variable original no se elimina, se puede usar otro método de integración que es el de integración por partes. Así como el método de cambio de variable se apoyaba en la regla de la cadena para las derivadas, la integración por partes se basa en la derivada de un producto de funciones.

Sean dos funciones tales que $u = f(x)$ y $v = g(x)$, la derivada del producto de estas funciones está dada por

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

en forma diferencial

$$d(uv) = udv + vdu$$

Despejando

$$udv = d(uv) - vdu$$

Integrando

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

43. Finalmente la fórmula para integración por partes puede escribirse

$$\int udv = uv - \int vdu$$