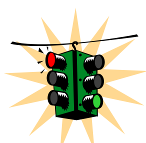
INTEGRACIÓN POR CAMBIO DE VARIABLE

Propósitos

- Identificar las operaciones algebraicas que convierten una integral a una forma inmediata (cambio de variable).
- Utilizar las tablas de integrales inmediatas para cambio de variable.
- Identificar las transformaciones algebraicas pertinentes para convertir una integral a una forma inmediata.
- Mejorar el desempeño algebraico, a través de la resolución de ejercicios de integración.

Dentro de los distintos métodos para encontrar la integral de ciertas funciones, está el método de *cambio de variable*, también conocido como *método de sustitución*.



Conceptos clave:

Si $\int f(x)dx = F(x)+C$, entonces $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C$

25. Aplicando la regla de la cadena la derivada de $F(g(x))+C$ y ya que $F' = f$:

a) $F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$

La fórmula de integración por tanto

b) $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))+C$

26. Si $u = g(x)$, derivando con respecto a x, $\frac{du}{dx} = g'(x)$, obteniendo la diferencial $du = g'(x)dx$ y sustituyendo en la fórmula de integración b), tenemos:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

La integral se obtiene con la formula ya antes vista

$$\int f(u)du = \int u^r du = \frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$$

Sugerencias para quien imparte el curso

Hacer algunos ejemplos con los alumnos, planteándoles algunas preguntas para que ellos mismos respondan.

Ejemplo 1

Obtener

$$\int (x^4 - 3)\, x^3 dx$$

$u = g(x) = x^4 - 3;\ du = g^{'}(x) = 4x^3 dx$

Cambiando la variable en la integral:

$\frac{1}{4}\int u\, du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) u^2 + C$ (Multiplicando y dividiendo entre cuatro)

Ya que $u = x^4 - 3$, finalmente se obtiene $\frac{1}{8}(x^4 - 3)^2 + C$

Ejemplo 2

Obtener

$$\int \sqrt{x^2 + 1}\, x\, dx$$

$u = g(x) = x^2 + 1;\ du = g^{'}(x) = 2x\, dx$

Cambiando la variable en la integral:

$\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}} du = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$ (Multiplicando y dividiendo entre dos)

Ya que $u = x^2 + 1$, finalmente se obtiene $\frac{1}{3}(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C$

Ejemplo 3

Obtener

$$\int \frac{dx}{3x+10}$$

$u = g(x) = 3x + 10; du = g^{'}(x) = 3\ dx$

Cambiando la variable en la integral:

$$\frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

Como $u = 3x + 10$, la integral es un logaritmo, se obtiene $\frac{1}{3}\ln u + C$

$$= \frac{1}{3}\ln(3x + 10) + C$$

Ejemplo 4

Obtener

$$\int -6x^2 e^{2x^3}\ dx$$

$u = g(x) = 2x^3; du = g^{'}(x) = 6x^2\ dx$

Cambiando la variable en la integral:

$$-\int e^u du$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

Como $u = 2x^3$;, la integral es $-e^u + C$

$$= -e^{2x^3} + C$$

Ejemplo 5

Obtener

$$\int \frac{sen5x}{cos5x}dx$$

$u = g(x) = \cos 5x$; $du = g^{'}(x) = -sen\ 5x\ (5)\ dx$

Cambiando la variable en la integral:

$$-\frac{1}{5}\int \frac{du}{u}$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

Como $u = cos5x$; la integral es $-\frac{1}{5}\ln(\cos u) + C = -\frac{1}{5}\ln\cos 5x + C$

Ejemplo 6

Obtener

$$\int \sec(4x + 9)\ dx$$

$u = g(x) = 4x + 9$; $du = g^{'}(x) = 4\ dx$

Cambiando la variable en la integral:

$$\frac{1}{4}\int \sec u\ \ du$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

La integral es $\frac{1}{4}\ln(\sec u + \tan u) + C = \frac{1}{4}\ln\left[\sec\ (4x + 9) + \tan(4x + 9)\right] + C$

Ejemplo 7

Obtener

$$\int -\csc^2 x \cot x\ dx$$

Se puede resolver de dos formas, veamos la primera de ellas.

$u = g(x) = -\cot x$; $du = g'(x) = csc^2 x\ dx$

Cambiando la variable en la integral:

$$-\int udu$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

Como $u = -\cot x$; la integral es $-\frac{1}{2}u^2 + C = -\frac{1}{2}cot^2 x + C$

Ejemplo 8

Obtener

$$\int 3x^2 \cos(x^3 + 2x^2)dx - \int 4x \cos(x^3 + 2x^2)dx$$

Agrupando términos

$$\int (3x^2 + 4x) \cos(x^3 + 2x^2)dx$$

$u = g(x) = x^3 + 2x^2$; $du = g'(x) = (3x^2 + 4x)\ dx$

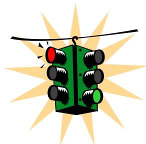
Cambiando la variable en la integral:

$$\int \cos u\, du$$

¿Cuál de las tablas de integrales inmediatas se podría usar para obtener la integral anterior?

La integral es $sen\, u + C = sen\ (x^3 + 2x^2) + C$

Mediante el método de *cambio de variable o sustitución* es posible que algunas integrales se vuelvan inmediatas.



Conceptos clave:

Para integrales exponenciales y logarítmicas:

$$\textbf{27.} \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$$

$$\textbf{28.} \int e^u du = e^u + C$$

$$\textbf{29.} \int a^u du = \frac{a^u}{\ln|a|} + C$$

Para las funciones trigonométricas, donde u es función de x, $u = g(x)$

30. $\int senudu = -\cos u + C$ **,**

31. $\int \cos udu = senu + C$

32. $\int \tan udu = -\ln \cos u + C = \ln \sec u + C$

33. $\int \cot udu = \ln senu + C$

34. $\int \sec udu = \ln|\sec u + \tan u| + C$

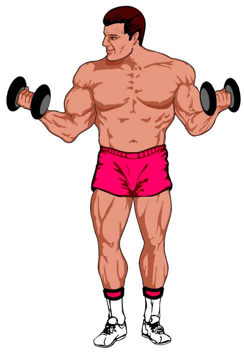
35. $\int \csc udu = \ln|\csc u - \cot u| + C$

36. $\int \sec^2 udu = \tan u + C$

37. $\int \csc^2 udu = -\cot u + C$

38. $\int \sec u \tan udu = \sec u + C$ **,**

39. $\int \csc u \cot udu = -\csc u + C$



Ejercicios

Obtener las integrales por cambio de variable. En algunos casos tendrás que hacer alguna simplificación algebraica.

1. $\int x^2\,(4x^3 - 9)dx$

2. $\int (3x + 6)\sqrt{\frac{3}{2}x^2 + 6x}\,dx$

3. $\int \frac{sen\ xdx}{cos\ x}$

4. $\int e^{4x^3}\,x^2 dx$

5. $\int x^2 sec\,2x^3\,tan\,2x^3\,dx$

6. $\int -7x^{-2}\cos(7x^{-1} + x)dx + \int \cos(7x^{-1} + x)dx$

7. $\int 6^{4x} 4dx + \int 2e^{2x} dx$

8. $\int e^{2x} dx + \int (x^2 + 1)(5x^3 + x)dx - \int tan 2x$