LA ANTIDERIVADA

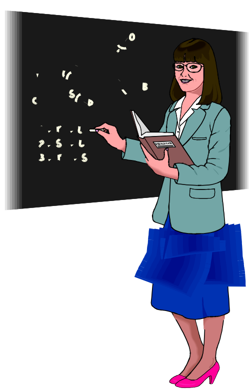
Sugerencias quien imparte el curso

Es importante comenzar con un problema que permita al alumno trabajar con algunas aplicaciones del tema que está a punto de abordar. Aunque existen aplicaciones en la economía y otros campos, regularmente los alumnos entienden más fácilmente problemas relacionados con la física, ya sea de velocidad o aceleración.

Propósitos

- Explorar situaciones o problemáticas cuya solución lleva a encontrar la antiderivada de la función constante o lineal.
- Observar que las antiderivadas de una función, difieren en una constante.
- Encontrar la antiderivada de la función potencia

El problema del alud.



Cierto satélite está monitoreando continuamente zonas de alto riesgo para la población, durante la época de lluvias aludes de tierra suelen desplazarse a grandes velocidades sobre grandes áreas y en poco tiempo cubrir comunidades enteras, causando con ello la muerte de personas e incalculables pérdidas económicas para los sobrevivientes. Si el satélite detecta un alud, debe inmediatamente emitir una alerta a la población en riesgo e indicar el tiempo máximo que tienen para la evacuación, esto logrará salvar decenas de vidas humanas.

El satélite recién ha detectado un gran alud de lodo que se desplaza cuesta abajo con una aceleración de $0.056\, m/s^2$, si una población se encuentra a su paso aproximadamente a 10km. ¿qué distancia recorrerá el alud en un minuto? ¿Qué distancia recorrerá el alud en 5, 6 y 7 minutos? y ¿Cuánto tiempo se tiene para evacuar a la población y ponerse a salvo?

Sugerencias quien imparte el curso

Hacer preguntas a los alumnos para saber cómo podrían resolver el problema. Recordarles que del curso anterior de Cálculo, se sabe que $a(t) = v'(t)$ *donde y* $v(t) = s'(t)$, *donde* $a(t)$ y $v(t)$ *son la aceleración y la velocidad respectivamente.*

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden tener dificultades para recordar lo visto en el curso anterior de Cálculo, si el problema es generalizado, quien imparte el curso debe considerar hacer un breve repaso o formar equipos para que los alumnos con menos dificultades apoyen a sus compañeros.

Sugerencias para quien imparte el curso

Apoyar a los alumnos para que encuentren las funciones de velocidad y distancia que resuelven el problema del alud.

Para resolver el problema se debe encontrar una función $v(t)$, tal que al derivarla, de cómo resultado $0.056\, m/s^2$, es decir, $v'(t) = 0.056$, esa función es,

$$v(t) = 0.056t.$$

Una vez que se ha obtenido $v(t)$, se procede a encontrar $s(t)$, la cual debe ser una función que al derivarla se obtenga como resultado $v(t)$, es decir,

$$s'(t) = v(t) = 0.056t.$$

La función buscada es

$$s(t) = \frac{0.056}{2}t^2 = 0.028t^2$$

Recordemos que las unidades deben estar en el S.I. (Sistema Internacional) por lo tanto, en la función $s(t)$ el tiempo está en segundos y la distancia en metros. De esta forma para responder a las preguntas que se plantearon en el problema del alud, 60 seg es un minuto. ¿Qué distancia recorrerá el alud en un minuto?

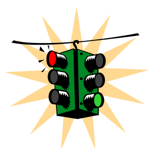
$$s(60) = 0.028(60)^2 = 100m$$

¿Qué distancia recorrerá el alud en 5, 6 y 7 minutos?

A los 5 minutos, $s(300) = 0.028(300)^2 = 2520m$, poco mas de 2.5km.
A los 6 minutos, $s(360) = 0.028(360)^2 = 3628.8m$,
A los 7 minutos, $s(420) = 0.028(420)^2 = 4939.2m$

¿Cuánto tiempo se tiene para evacuar a la población y ponerse a salvo?

$10000 = 0.028t^2$, despejando t, $t = 597.61\, seg$ que divididos entre 60 para convertirlos a minutos $t = 9.96\, min$, en otras palabras, los habitantes tienen menos de 10 minutos para evacuar y salvar sus vidas.



Concepto clave:

1. Si f y F son funciones de x, tales que $F'(x) = f(x)$, entonces se dice que F es antiderivada de f. Siempre que $f(x)$ esté definida.

Algunas veces a la antiderivada, se le llama función primitiva.

Sugerencias para quien imparte el curso

Realizar una serie de ejercicios como los siguientes para que los alumnos infieran la regla para encontrar la antiderivada de funciones del tipo $f(x) = ax^n$

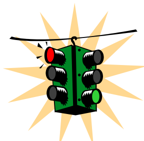
¿Cuál es la función $f(x)$, cuya antiderivada es $f(x) = 8x$?

Encuentra $F(x)$ en la siguiente tabla.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$ **Comprobación**
$f(x) = 3x$		$f(x) =$
$f(x) = 3x + 2$		$f(x) =$
$f(x) = 3x - 1.9$		$f(x) =$
$f(x) = 3x + 2.7$		$f(x) =$

Los alumnos pueden graficar las distintas antiderivadas de la tabla anterior usando su cuaderno o algún software comparando las funciones y la pendiente de las antiderivadas.

Dada una función $f(x) = 3x - 1.9$, sabemos que $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1.9x$, sin embargo, también lo es $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1.9x + 2$, o incluso $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1.9x - 3$, o cualquier $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 1.9x + C$, donde C es un numero real.



Conceptos clave:

2. Si F_1 y F_2 son antiderivadas de f, entonces difieren a lo más en una constante.

En general, si $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$, entonces también lo es $F(x)+C$, donde **C** puede ser cualquier número real.

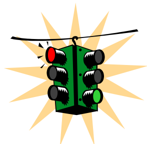
A la antiderivada $F(x)+C$, se le conoce como la antiderivada más general.

Completa la tabla siguiente

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x)}$	$\boldsymbol{F'(x)}$
$f(x) =$	$F(x) = 2x$	$F'(x) =$
$f(x) = x$	$F(x) =$	$F'(x) =$
$f(x) =$	$F(x) =$	$F'(x) = 3x$
$f(x) =$	$F(x) = 4x - 7$	$F'(x) =$
$f(x) = 3$	$F(x) =$	$F'(x) =$
$f(x) = 1 - x$	$F(x) =$	$F'(x) =$
$f(x) = x + 3$	$F(x) =$	$F'(x) =$

Puntos problemáticos

Algunos alumnos llegar a confundirse con las funciones $F(x)$ y $f(x)$, o podrían no llegar a deducir una regla para obtener la antiderivada, se recomienda hacer varios ejercicios en equipos o en parejas así como invitar a los alumnos a que resuelvan ejercicios en el pizarrón y expliquen cómo están obteniendo sus resultados, de esta forma los alumnos pueden reafirmar lo aprendido.



Conceptos clave:

3. La antiderivada más general de F de $f(x) = ax^n$, donde n es un numero racional $(n \neq -1)$, está dada por

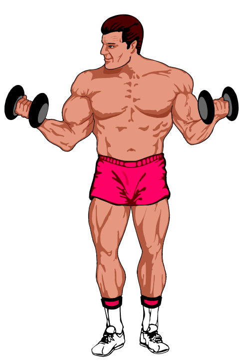
$$F(x) = \frac{1}{n+1}ax^{n+1}\text{+C}$$

4. Si $f_1(x) = a_1x^{n_1}$ y $f_2(x) = a_2x^{n_2}$ donde a_1 y a_2 son dos constantes cualesquiera y n_1 y n_2 son números racionales $n_1\, y\, n_2\ \neq -1)$ y si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$. entonces

La antiderivada más general $F(x)$ de $f(x)$ es:

$$F(X) = \frac{1}{n_1+1}a_1x^{n_1-1} + \frac{1}{n_2+1}a_1x^{n_2-1} + C; \quad C = C_1 + C_2$$

En general, tal como en la suma de derivadas, la antiderivada de una suma de funciones, es igual a la suma de sus antiderivadas



Ejercicios

1. Se sabe que el auto Lamborghini Murciélago con sus 12 cilindros acelera de 0 a 100km/h en 3.7 segundos.
¿Qué distancia recorrerá en ese tiempo?

Ayuda: El estudiante deberá convertir 100k/h a metros por segundo y para encontrar la aceleración utiliza la fórmula:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

2. Un jugador de futbol parte a toda velocidad del área grande de su portería para recibir un pase de su compañero que se encuentra unos metros delante de él, se sabe que la aceleración del jugador es de $2m/s^2$, que distancia recorera en 5 segundos.

3. Completar la siguiente tabla con $F(x)$ o $f(x)$

$f(x) =$	$F(x) = 2x$
$f(x) = 3$	$F(x) =$
$f(x) = 2x$	$F(x) =$
$f(x) = x^2$	$F(x) =$
$f(x) =$	$F(x) = x^3$

4. Encontrar la antiderivada más general de las siguientes funciones usando los conceptos claves 2 y 3.

$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{F(x) =}$	**Comprobar**
$f(x) = 2x^2 + 1$	$F(x) =$	
$f(x) = 2x^2 + x$	$F(x) =$	
$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + 1$	$F(x) =$	
$f(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{8}x^2$	$F(x) =$	
$f(x) = x^5 - 3$	$F(x) =$	