DERIVADA DE LA FUNCIÓN LOGARITMO DE CUALQUIER BASE Y LA DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Sugerencias para quien imparte el curso:

Se espera que con la propuesta didáctica presentada en conjunción con los aprendizajes logrados en Cálculo I, los alumnos logren una comprensión aceptable del concepto de derivada, de la propuesta se concluye que no basta con escribir la definición en el pizarrón y exhibir algunos ejemplos para que el concepto quede asimilado, el profesor o profesora debe planear una estrategia de enseñanza y aprendizaje que permita el desarrollo de habilidades que garanticen su comprensión y no su sola memorización, lo anterior bajo la premisa de que la enseñanza de la derivada es porque permite resolver muchos problemas de variación y no porque sea un concepto atractivo desde el punto de vista formal matemático.

Propósitos:

1. Reafirmar el concepto de función inversa.
2. Recordar la condición algebraica y gráfica para que dos funciones sean inversas.
3. Retomar el procedimiento para obtener la función inversa de una función uno a uno.
4. Recordar las propiedades de los logaritmos y cómo cambiar de base.
5. Obtener la regla para derivar a la función básica logaritmo de cualquier base.
6. Inducir la regla para la derivada generalizada de la función logaritmo de cualquier base.
7. Conocer en qué consiste el método de la derivación logarítmica y cuándo aplicarlo.

EL PROBLEMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

Encuentra la derivada de la función inversa de la función $f(x) = 2^x$.

Preguntar:

1. ¿Qué tipo de función es $f(x)$?

2. ¿Cuáles funciones son las inversas de las funciones exponenciales?

3. ¿Qué condición debe cumplir una función para que tenga inversa?

4. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas, ¿qué debe pasar con la composición $f(g(x))$ y $g(f(x))$?

5. Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son inversas, ¿cómo son sus gráficas con respecto a la recta $y=x$?

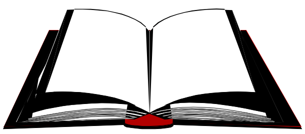
6. ¿Cómo se relacionan entre si el dominio y el rango de un par de funciones inversas?

7. ¿Cuál es la función inversa de $f(x)=2^x$?

8. ¿Cuál es el dominio y rango de la función $f(x)=2^x$?

9. ¿Cuál es el dominio y rango de la función inversa de la función $f(x)=2^x$?

Provocar una discusión grupal sobre las respuestas correctas a la serie de preguntas anterior, permitirá dar solución a una dificultad que se puede presentar en esta sección, ya que en algunos casos los alumnos no hicieron, en su curso de Matemáticas IV, un estudio amplio sobre las características que deben cumplir un par de funciones inversas, de tal manera que durante la discusión se deberán abordar ejemplos que las muestren, aún cuando las respuestas correctas a las preguntas 2 y 7 hayan surgido de manera inmediata.



PROCEDIMIENTO PARA OBTENER LA FUNCIÓN INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

Paso 1. Reemplazar $f(x)$ por y.

Paso 2. Intercambiar las variables x y y.

Paso 3. Despejar y de la ecuación.

Paso 4. Reemplazar y por $g(x)$, esto proporciona a la función inversa.

Ejemplo 1.

La función $f(x)=4x+2$ tiene inversa, ya que como se puede observar con el apoyo de su gráfica que aparece en la figura 1 y del método de la recta horizontal, que ésta es uno a uno.

Paso 1. $y=4x+2$

Paso 2. $x=4y+2$

Paso 3. $y=\frac{x-2}{4}$

Paso 4. La función inversa es $g(x)=\frac{x-2}{4}$

Comprobación algebraica:

a) $f(g(x))=f\left(\frac{x-2}{4}\right)=4\left(\frac{x-2}{4}\right)+2=x$

b) $g(f(x))=g(4x+2)=\frac{(4x+2)-2}{4}=x$

En la figura 2 están graficadas ambas funciones, en ella se observa que son simétricas respecto a la recta $y=x$.

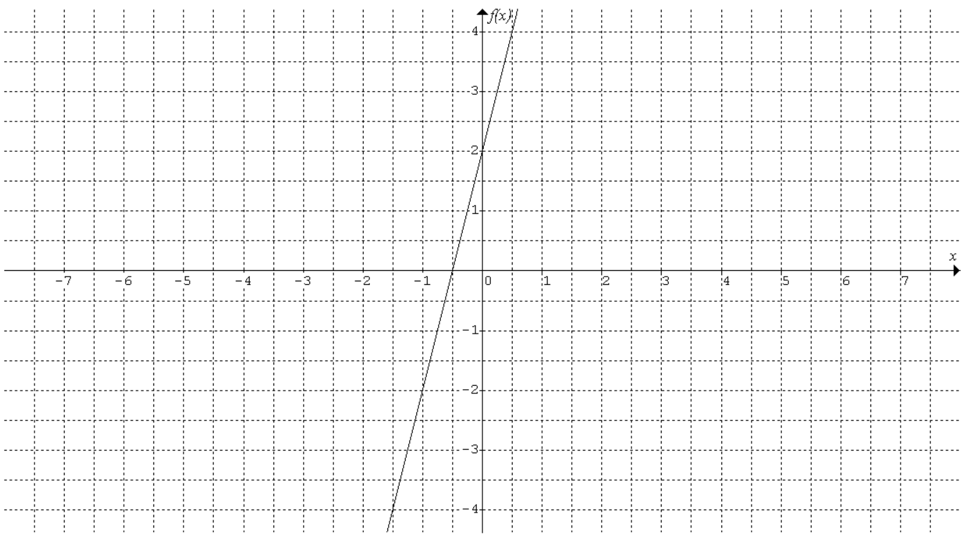


Figura 1

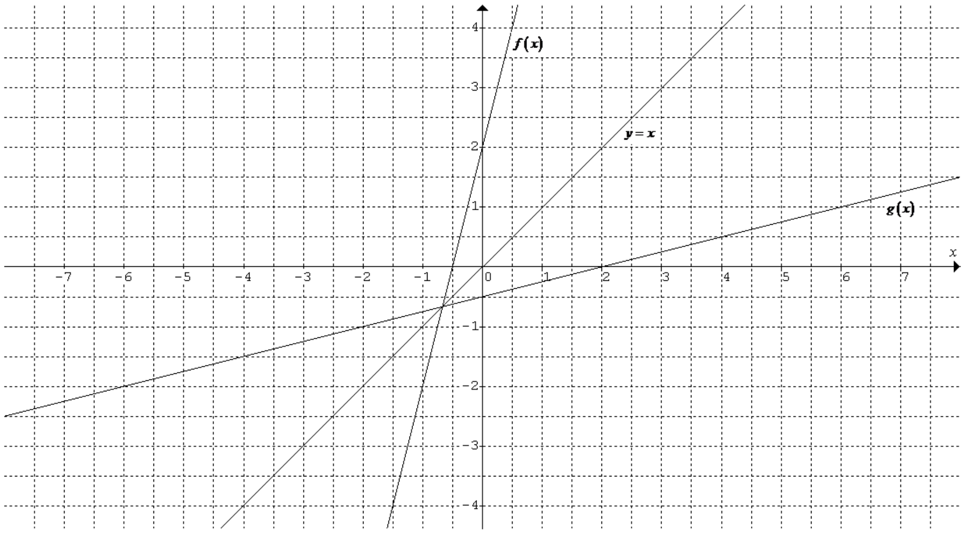
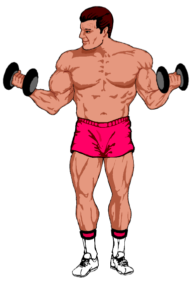


Figura 2



Ejercicio 1.

En la figura 3 está la gráfica de la función $f(x)=x^3+2$.

Verifica que la función es uno a uno, obtén su inversa y comprueba algebraicamente tu respuesta.

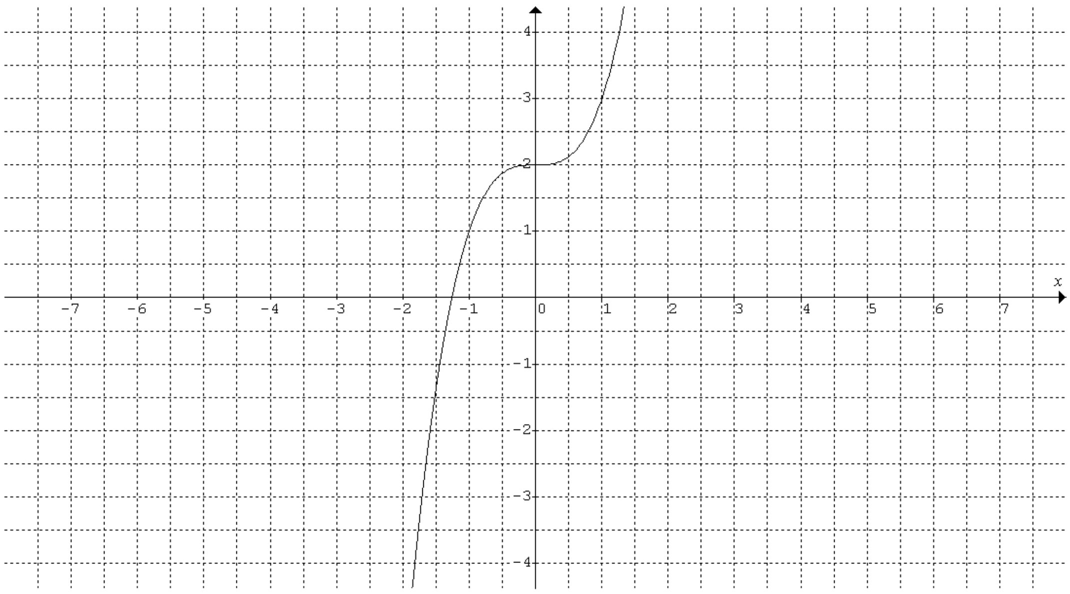


Figura 3

Volviendo a la función del problema, pedir que construyan su gráfica y preguntar por qué es uno a uno.

Puesto que la función $f(x)=2^x$ es uno a uno, tiene inversa y es:

Paso 1. $y=2^x$

Paso 2. $x=2^y$

Preguntar:

10. ¿Cómo se despeja y de la ecuación?

Es muy probable que los alumnos respondan que aplicando el logaritmo común o el logaritmo natural, sin embargo, por convenir al interés de la propuesta hay que pedir que se aplique el logaritmo de base dos.

Es posible que algunos alumnos no sean capaces de resolver ecuaciones exponenciales, así que para solucionar esta dificultad y otra que se puede presentar más adelante, tal vez se requiera de mencionar la aplicación de los logaritmos, hacer una reseña a sus propiedades y trabajar breves ejemplos para hacer uso de la expresión de cambio de base.

Paso 3. $y=log_2\, x$

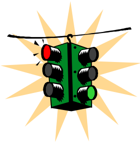
Paso 4. La función inversa es $g(x)=log_2\, x$, que es un caso particular de la función exponencial básica de base a.

Con el propósito de encontrar la derivada de $g(x)=log_2\, x$, preguntar:

11. Haciendo un cambio de base, ¿cómo se expresa $log_2\, x$ utilizando el logaritmo natural?

Una vez que han respondido que $log_2\, x=\dfrac{ln\, x}{ln\, 2}$, solicitar que encuentren $\left(\dfrac{d}{dx}\right)\left(\dfrac{ln\, x}{ln\, 2}\right)$ y verificar que el resultado que obtienen es el correcto para concluir que $g'(x)=\dfrac{1}{x\cdot ln\, 2}$.

Aplicar el mismo procedimiento para obtener la derivada de $f(x)=log_a\, x$, y establecerla como concepto clave.



Concepto clave:

23. Derivada de la función básica logaritmo de base *a*

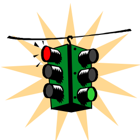
Si $f(x) = log_a\, x$ con base positiva distinta de uno, entonces $f'(x) = \dfrac{1}{x \cdot ln\, a}$,

o con las otras notaciones; $\dfrac{d\ log_a\ x}{dx} = \dfrac{1}{x \cdot ln\, a}$ o $D_x(log_a\ x) = \dfrac{1}{x \cdot ln\, a}$

Preguntar:

12. ¿Cuál será la regla para la derivada generalizada de la función logaritmo de base a?, es decir, si el argumento de la función logaritmo de base a es una función u derivable de x, ¿cuál será su derivada?

La respuesta correcta servirá para implantar el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

24. Derivada generalizada de la función logaritmo de base *a*

Si $f(x) = log_a\, u$ donde a es un número positivo distinto de uno y u es una función derivable de x, entonces

$$\frac{d\ log_a\ u}{dx} = \left(\frac{d\ log_a\ u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{1}{u \cdot ln\, a}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

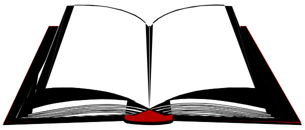
Para concluir la unidad, se piensa que sería adecuado mostrar cómo se utilizan las propiedades de la función logarítmica para simplificar en algunos casos el proceso de derivación, cuando la función es un producto o un cociente.

La afirmación anterior se basa en el resultado $\dfrac{d\ ln\, u}{dx} = \left(\dfrac{1}{u}\right)\left(\dfrac{du}{dx}\right)$.

Preguntar:

12. Si despejas $\dfrac{du}{dx}$ de la relación anterior ¿qué obtienes?

A partir de la respuesta se podrá establecer el siguiente procedimiento:



PROCEDIMIENTO PARA APLICAR EL MÉTODO DE LA DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

Si la función u es un producto o un cociente, para encontrar $\frac{du}{dx}$ con el método de la derivación logarítmica, realizar lo siguiente:

Paso 1. Encuentra $\frac{d\, ln\, u}{dx}$.

Paso 2. Multiplica el resultado anterior por u.

Ejemplo 2.

Si $u=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$, pedir a los alumnos que realicen los pasos indicados para obtener $\frac{du}{dx}$, por medio del método de la derivación logarítmica, y verificar que los resultados sean los correctos.

Dado que el procedimiento es para un producto o un cociente, primero expresa el radical como un cociente.

Luego aplica el logaritmo natural a ambos miembros de la relación anterior y exprésala como una diferencia, puesto que $ln\left(\frac{A}{B}\right)=ln\, A-ln\, B$.

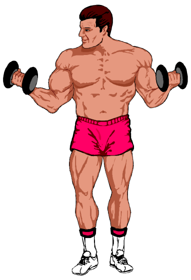
Ahora sí, aplica el procedimiento indicado:

Paso 1. Deriva la diferencia anterior y realiza el álgebra necesaria para obtener el resultado $\frac{d\, ln\, u}{dx}=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x^2}{x^3-1}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$.

Paso 2. Multiplica el resultado anterior por $u=\sqrt{\frac{x^3-1}{x^2+1}}$ y simplifica para obtener finalmente que $\frac{du}{dx}=\frac{x^4+3x^2+2x}{2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{2}}}$

Ejercicio 2.

Si $u=\left(x^4-3\right)\left(x^2+2\right)$, verifica utilizando el método de la derivación logarítmica que $\dfrac{du}{dx}=6x^5+8x^3-6x$. Recuerda que $ln\left(A\cdot B\right)=ln\,A+ln\,B$.



Ejercicio 3.

Utilizando la derivación logarítmica, demuestra que si u y v son funciones derivables de x, entonces:

a) $\dfrac{d\left(u\cdot v\right)}{dx}=\left(\dfrac{du}{dx}\right)\left(v\right)+\left(u\right)\left(\dfrac{dv}{dx}\right)$

b) $\dfrac{d\left(\dfrac{u}{v}\right)}{dx}=\dfrac{\left(\dfrac{du}{dx}\right)\left(v\right)-\left(u\right)\left(\dfrac{dv}{dx}\right)}{v^2}$