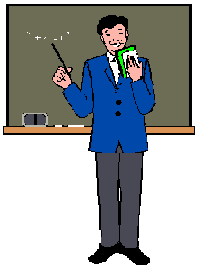
DERIVADA GENERALIZADA DE LAS FUNCIONES TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE



Sugerencias para quien imparte el curso:

El principal papel del profesor o profesora que imparte el curso consiste en controlar el proceso de solución de los problemas planteados y reorientar el trabajo en caso de desvíos, para lo cual en su planeación deberá pensar en establecer un diálogo con los estudiantes basado en una serie de preguntas que guíen hacia la solución del problema, sobre todo en aquellos momentos en que no puedan utilizar directamente sus conocimientos previos, por ser insuficientes y surja la necesidad de construir otros nuevos, sin embargo en algunas etapas de la búsqueda del conocimiento se deberá permitir que los estudiantes lo hagan de manera independiente.

Propósitos:

1. Reafirmar el concepto de recta normal en un punto de la gráfica de una función.
2. Conocer los conceptos segmento normal y subnormal, asociados a la recta normal.
3. Establecer las reglas para la derivada generalizada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante.

EL PROBLEMA DE LA RECTA NORMAL Y SUS SEGMENTOS ASOCIADOS

En la figura 1 aparece la gráfica de la función trigonométrica $f(x) = -tan\, x^2$ y la gráfica de la recta normal a la curva en el punto P de abscisa $x = 0.5$, obtén la ecuación de dicha recta, la longitud del segmento normal y de la subnormal, además verifica algebraicamente que la función tiene máximo para $x = 0$ en el intervalo $(-1,1)$.

Preguntar:

1. ¿Qué relación tienen en un punto dado de una función, la recta normal y la recta tangente?

2. ¿Cómo se podrá obtener la pendiente de la recta normal?

3. ¿Cuál será la función que representa a la pendiente de la recta tangente en cualquier punto de la gráfica de la función $f(x) = -tan\, x^2$?

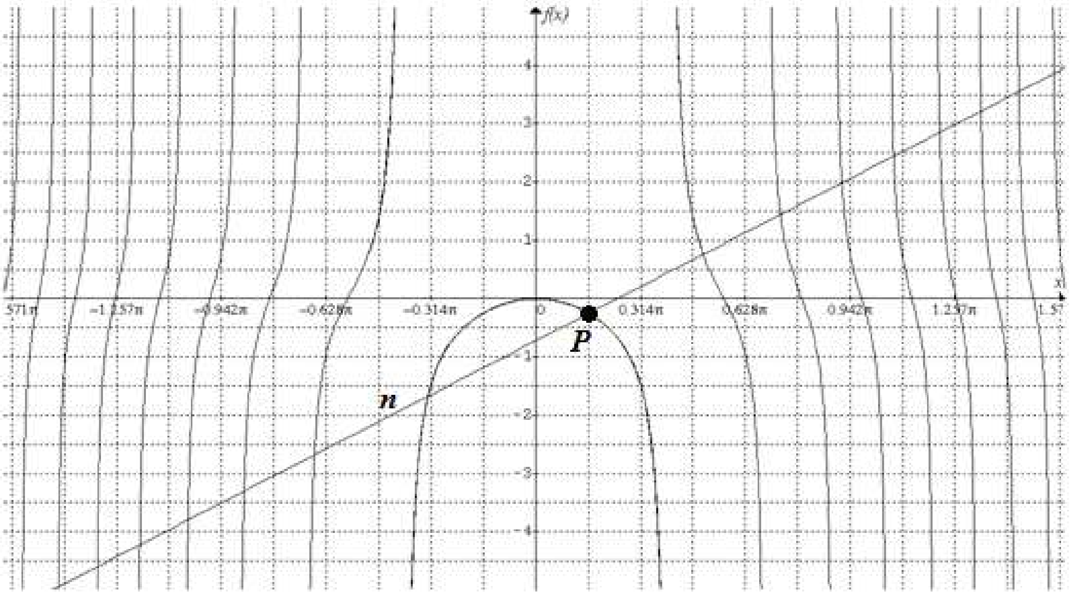
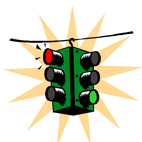


Figura 1

Una vez que se tenga una respuesta parcial correcta a la pregunta **3**, pedir que encuentren la función $f'(x)$, revelando una vez más que habrán de aplicar la regla de la cadena, ya que la función $f(x) = \tan x^2$ es la composición de las funciones $g(x) = \tan x$ y $h(x) = x^2$, es decir que $f(x) = g(h(x))$ y por lo tanto su derivada es $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$.

Dar tiempo a los alumnos para que deriven la función y cuidar que lleguen al resultado correcto $f'(x) = (-2x)(\sec^2 x^2)$.

Como en casos anteriores, será labor de quien imparte el curso promover la generalización del resultado anterior para introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

13. Derivada generalizada de la función tangente

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $\tan u$ está dada por:

$$\frac{d\ \tan u}{dx} = \left(\frac{d\ \tan u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\sec^2 u\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Con respecto al problema de inicio, preguntar:

4. ¿Cuáles son las coordenadas del punto P?

5. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto P?

6. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta normal en el punto P?

7. ¿Cuál es la ecuación de la recta normal en el punto P?

Para que los alumnos conozcan y calculen la longitud del segmento normal y de la subnormal, presentar la figura 2, donde $\overline{PR}$ es el segmento normal y $\overline{PQ}$ es la subnormal.

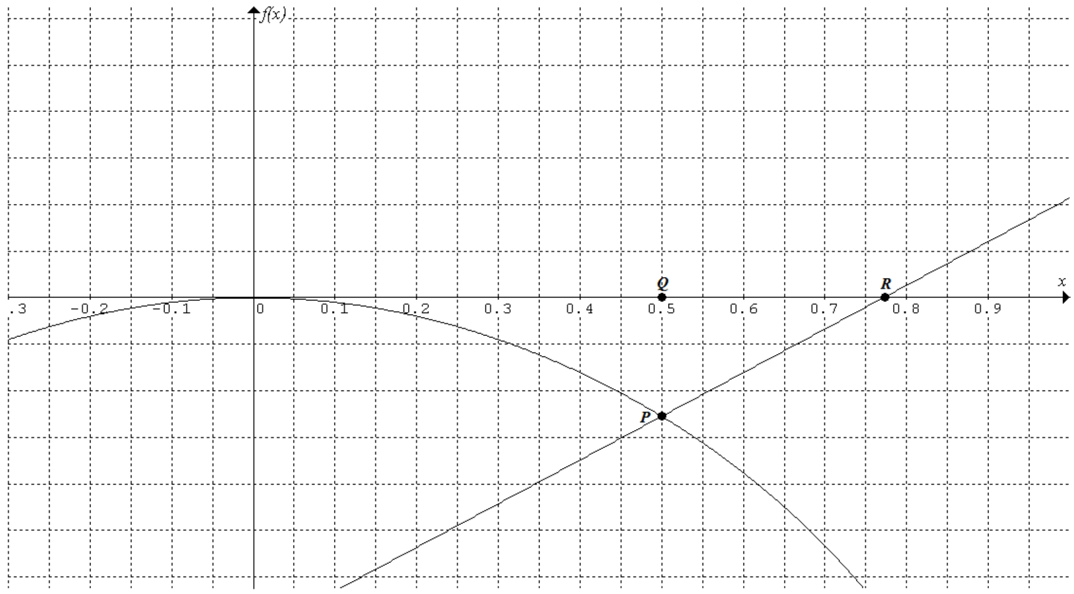


Figura 2

Para verificar algebraicamente que la función tiene máximo en $x=0$, que puede apreciarse en la gráfica de la figura 1, pedir que se aplique el criterio de la segunda derivada, por convenir a la propuesta didáctica, pues en el tercer paso surgirá la necesidad de construir nuevos conocimientos.

Paso 1. Obtener $f'(x)=(-2x)\left(sec^2x^2\right)$

Paso 2. Resolver la ecuación $(-2x)\left(sec^2x^2\right)=0$

Orientar la resolución de la ecuación, por medio de preguntas como las que siguen:

8. ¿Cuándo el producto de dos factores es igual a cero?

9. ¿Por qué el factor $sec^2 x^2$ no puede ser igual a cero?

10. ¿Qué pasaría si $sec^2 x^2 = 0$?

11. Como $sec^2 x^2 \neq 0$, ¿qué se puede afirmar del factor $-2x$?

12. Si el factor $-2x = 0$, ¿cuál es la solución de la ecuación $(-2x)(sec^2 x^2) = 0$?

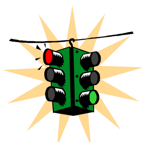
13. ¿Qué se puede asegurar del valor obtenido $x = 0$?

Paso 3. Obtener la segunda derivada.

$\dfrac{d^2\, tan\, x^2}{dx^2} = \dfrac{d(-2x)(sec^2 x^2)}{dx} = (-2)(sec^2 x^2) + (-2x)\left(\dfrac{d\, sec^2 x^2}{dx}\right)$, donde surge la necesidad de ampliar los conocimientos hasta el momento adquiridos, porque $\dfrac{d\, sec^2 x^2}{dx} = \dfrac{d\left(sec\, x^2\right)^2}{dx} = (2)(sec\, x^2)\left(\dfrac{d\, sec\, x^2}{dx}\right)$, pero ¿a qué es igual el tercer factor?

Si se les plantea la pregunta a los alumnos, es muy probable que por la experiencia ya adquirida, respondan que por medio de la regla de la cadena, ya que la función $g(x) = sec\, x^2$ es la composición de las funciones $h(x) = sec\, x$ y $k(x) = x^2$, es decir $g(x) = h(k(x))$ y por lo tanto, $g'(x) = h'(k(x)) \cdot k'(x)$.

Pedir que comprueben que $g'(x) = (2x)(sec\, x^2 \cdot tan\, x^2)$ y generalizar para fijar el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

14. Derivada generalizada de la función secante

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $sec\, u$ está dada por:

$$\frac{d\, sec\, u}{dx} = \left(\frac{d\, sec\, u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = (sec\, u \cdot tan\, u)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Para continuar con el problema, solicitar la confirmación del resultado siguiente:

$$f''(x) = -2 \cdot sec^2 x^2 \left(1 + 4x^2 \cdot tan\, x^2\right)$$

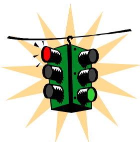
Preguntar:

14. ¿Cuál es el valor de $f''(0)$?

15. Según el resultado anterior, ¿la función $f(x) = -tan\,x^2$ tiene máximo o mínimo en $x = 0$?

16. ¿Cuál es ese valor?

Acordar que los alumnos por si solos establezcan los siguientes conceptos clave.

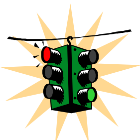


Concepto clave:

15. Derivada generalizada de la función cotangente

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $cot\,u$ está dada por:

$$\frac{d\ cot\,u}{dx} = \left(\frac{d\ cot\,u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(-csc^2 u\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$



Concepto clave:

16. Derivada generalizada de la función cosecante

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $csc\,u$ está dada por:

$$\frac{d\ csc\,u}{dx} = \left(\frac{d\ csc\,u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(-csc\,u \cdot cot\,u\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Cerrar la sección, proponiendo la resolución de ejercicios para practicar la parte algorítmica, ejemplificando detalladamente la resolución de algunos de ellos, agregando las reglas introducidas en esta ocasión.