DERIVADA GENERALIZADA DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Sugerencias para quien imparte el curso:

Hay que privilegiar el aspecto utilitario del Cálculo, haciendo ver que ante la necesidad de resolver problemas de movimiento surge la noción de rapidez de la variación instantánea, que es donde el concepto de derivada encuentra su esencia, resaltando que la derivada es una razón de cambio como la velocidad, como la aceleración, pero a diferencia de la velocidad o aceleración medias, la derivada permite determinar cuánto cambia una variable respecto a otra en un instante, en un punto, así que si se conoce la función que relaciona a la distancia respecto al tiempo, se puede cuantificar la velocidad o la aceleración de un cuerpo en un instante. Es responsabilidad de quien imparte el curso no dejar a los alumnos con la creencia que la derivada es simplemente una fórmula carente de significado y alejado de la realidad.

Propósitos:

1. Fortalecer la aplicación de las funciones trigonométricas a fenómenos físicos que tienen que ver con el tiempo.
2. Corroborar la interpretación física de la primera y de la segunda derivada.
3. Reafirmar la aplicación de la regla de la cadena.
4. Obtener las reglas generalizadas para la derivada de las funciones seno y coseno, por medio de la aplicación de la regla de la cadena.

EL PROBLEMA DEL PÉNDULO

Un péndulo simple de treinta centímetros de longitud, empieza a oscilar después de que se lleva hacia la derecha de la posición O a la posición de inicio A, formándose un ángulo de $\frac{\pi}{6}$, como se muestra en la figura 1.

Si se registraron treinta oscilaciones en cinco segundos, calcula la elongación, la velocidad y la aceleración del movimiento cuando el tiempo $t = \frac{7}{48}$ segundos.

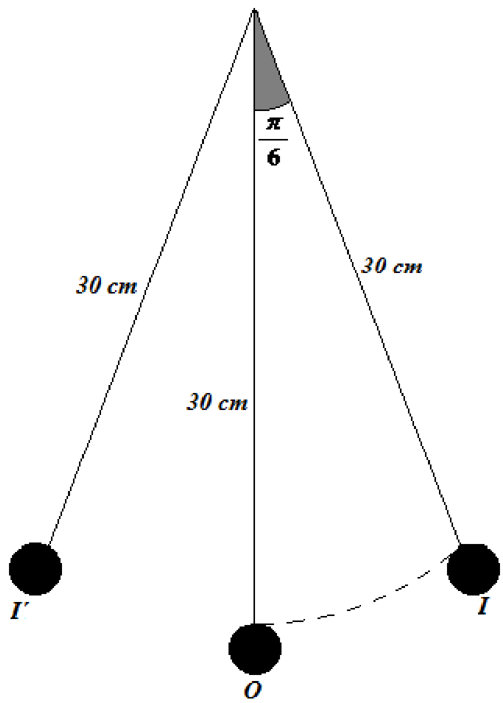


Figura 1

Para responder se deberán construir tres funciones dependientes del tiempo, la primera será aquella que permita calcular la elongación del péndulo, la segunda su velocidad y la tercera su aceleración, todas ellas en el instante t.

Preguntar:

1. ¿Qué tipo de movimiento es el movimiento de un péndulo simple?

Aún cuando en el curso de Matemáticas IV se resolvieron problemas de fenómenos cíclicos relacionados con el tiempo, tal vez será necesario recordar que el movimiento de un péndulo simple es un movimiento armónico simple, que es periódico y su elongación dependerá de la posición del objeto la cual varía según una función senoidal o una función cosenoidal.

Como ayuda, apoyarse de la figura 2, donde aparece la gráfica de la función posición $p(t)$ del movimiento del péndulo del problema.

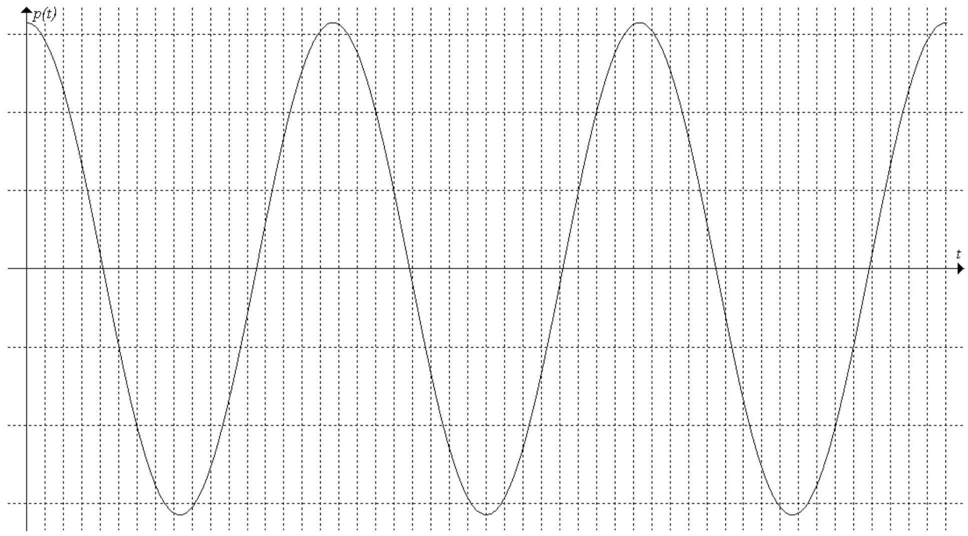


Figura 2

Preguntar:

2. Según la gráfica, ¿qué tipo de función sería más simple de utilizar, una senoidal o una cosenoidal?

Se espera que la mayoría de alumnos sugieran una cosenoidal, así que en lo que sigue se trabajara bajo este supuesto para construir la función posición $p(t) = A \cdot cos\, Bt$.

Preguntar:

3. ¿Cómo se podrá determinar la amplitud de la onda graficada?

Después de escuchar algunas propuestas, indicar que la amplitud A estará dada por la longitud del arco $\overset{\frown}{OI}$ de la figura 1, pedir que la calculen y prestar atención a que se llegue al resultado $A = 5\pi$, el cual se sigue de aplicar la definición de radián.

Preguntar:

4. Si el péndulo hace treinta oscilaciones en cinco segundos, ¿cuál es la frecuencia del movimiento del péndulo?

Esperar a que los alumnos concluyan que tiene una frecuencia de $6\ Hz$, para preguntar:

5. ¿Qué periodo tiene la onda graficada?

6. ¿Cuál es el valor para el parámetro B de la función posición?

Finalmente se tendrá que la posición del péndulo estará dada por la función $p(t) = 5\pi \cdot cos\, 12\pi t$.

Ahora toca preparar el camino para encontrar las funciones que permitan calcular la velocidad y la aceleración del péndulo, por lo que es factible enfrentar la dificultad de que existan alumnos que no relacionen la primera y la segunda derivada de una función con los conceptos físicos de velocidad y aceleración instantáneas, la recomendación es no dar por sentado el hecho sino planear un diálogo con los alumnos que permita reformular dicho conocimiento.

Preguntar:

7. Cuando se considera un cuerpo en movimiento y se conoce su función de posición $p(t)$, ¿cuál concepto matemático expresa su razón de cambio instantánea y qué interpretación física tiene?

Anotar que es la velocidad instantánea v a la que se mueve el cuerpo y que está dada por la función $v(t)=\dfrac{d\,p(t)}{dt}$.

8. También la velocidad v puede cambiar con el tiempo, ¿cuál concepto matemático indica su razón de cambio instantánea y qué interpretación física tiene?

Dejar asentado que es la aceleración instantánea a del cuerpo y que está dada por la función $a(t)=\dfrac{d\,v(t)}{dt}$.

Enfatizar que $a(t)=\dfrac{d\,v(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\,p(t)}{dt}\right)=\dfrac{d^2\,p(t)}{dt^2}$.

Como resultado de lo anterior exponer el siguiente resumen:

Si durante el movimiento de un cuerpo, la función $p(t)$ indica su posición en el tiempo t, entonces en ese instante de tiempo, la velocidad del cuerpo está dada por la función $v(t)=p'(t)$, mientras que su aceleración a viene dada mediante la función $a(t)=p''(t)$.

En virtud de los conocimientos reconstruidos, las funciones velocidad y aceleración para el péndulo del problema se obtendrán a través de $\dfrac{d\left(5\pi\cdot cos\,12\pi t\right)}{dt}$ y $\dfrac{d^2\left(5\pi\cdot cos\,12\pi t\right)}{dt^2}$, respectivamente.

Al obtener $v(t)=\dfrac{d\left(5\pi\cdot cos\,12\pi t\right)}{dt}=5\pi\cdot\left(\dfrac{d\;cos\,12\pi t}{dt}\right)$, de nueva cuenta se enfrenta al estudiante a un hecho donde no es posible utilizar los conocimientos hasta el momento obtenidos, surgiendo la necesidad de construir otros nuevos.

Preguntar:

9. Al querer obtener $\dfrac{d\ \cos 12\pi t}{dt}$, ¿será posible aplicar directamente la regla para obtener la derivada de la función básica del coseno? ¿Por qué?

Señalar que la función $h(t)=\cos 12\pi t$, no es la función básica coseno, sino que es la composición de las dos funciones derivables, $f(t)=\cos t$ y $g(t)=12\pi t$, ya que $h(t)=f(g(t))$.

Preguntar:

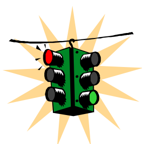
10. ¿Cuál es la regla para derivar una composición de funciones?

Una vez que se ha vuelto a instaurar la regla de la cadena, aplicarla conjuntamente con los alumnos para obtener:

$$\frac{d\ \cos 12\pi t}{dt}=(-sen\ 12\pi t)(12\pi)=-12\pi\cdot sen\ 12\pi t$$

Por lo tanto, la función velocidad del péndulo es $v(t)=-60\pi^2\cdot sen\ 12\pi t$.

Será labor de quien imparte el curso promover la generalización del resultado anterior para introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

11. Derivada generalizada de la función coseno

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $\cos u$ está dada por:

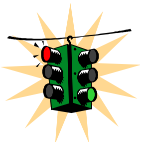
$$\frac{d\ \cos u}{dx}=\left(\frac{d\ \cos u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=(-sen\ u)\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Al querer obtener la función aceleración para el problema del péndulo, el alumno estará en una situación semejante al caso de la velocidad, ya que al derivar la función velocidad se tendrá:

$$a(t)=\frac{d\ v(t)}{dt}=\frac{d\left(-60\pi^2\cdot sen\ 12\pi t\right)}{dt}=\left(-60\pi^2\right)\left(\frac{d\left(sen\ 12\pi t\right)}{dt}\right),$$ de donde

surge la duda, ¿cómo obtener $\dfrac{d\left(sen\ 12\pi t\right)}{dt}$?

Es muy probable que los alumnos, guiados por el análisis anterior concluyan que $\frac{d\left(sen\ 12\pi t\right)}{dt} = 12\pi \cdot cos\, 12\pi t$, que la función aceleración para el problema del péndulo es $a\left(t\right) = -720\pi^3 \cdot cos\, 12\pi t$ y que además construyan por si mismos el siguiente concepto clave.

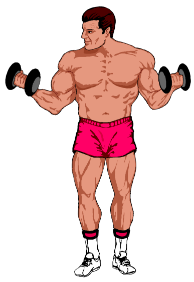


Concepto clave:

12. Derivada generalizada de la función seno

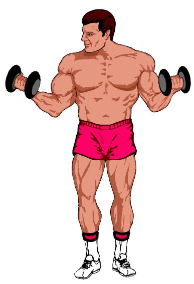
Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de la función $sen\, u$ está dada por:

$$\frac{d\ sen\, u}{dx} = \left(\frac{d\ sen\, u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(cos\ u\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$



Ejercicio 1

Aplica las funciones $p\left(t\right)$, $v\left(t\right)$ y $a\left(t\right)$ obtenidas para dar respuesta al problema del péndulo.



Ejercicio 2

Si un cuerpo que está suspendido de un resorte está vibrando verticalmente sin fricción y su posición a los t segundos está dada por la función $p\left(t\right) = 5 \cdot sen\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$ centímetros, calcula la elongación, la velocidad y la aceleración del cuerpo cuando $t = 0.4$, $t = 1.2$ y $t = 2$ segundos.

Una constante en todas las secciones, es que a quien imparte el curso le corresponderá proponer al final de cada una de ellas, la resolución de ejercicios para practicar la parte algorítmica, siempre ejemplificando detalladamente la resolución de algunos de ellos, agregando cada vez las reglas introducidas en la sección correspondiente.