FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sugerencias para quien imparte el curso:

Por ningún motivo se debe dar por hecho que todos los alumnos recuerdan perfectamente a las razones trigonométricas, y a las principales propiedades y conceptos asociados a las funciones trigonométricas así como a su comportamiento gráfico, así que es recomendable hacer un breve recorrido por tales conceptos. Si por circunstancias de tiempo no se considera factible llevarlo a cabo en el salón de clase, se podría pedir a los alumnos que como trabajo extra clase realicen las actividades expuestas en esta primera sección.

Propósitos:

1. Recordar el concepto de razón trigonométrica y su aplicación.
2. Reafirmar el concepto general de función y de los subconceptos asociados, dominio, rango y regla de correspondencia.
3. Fortalecer el concepto de función trigonométrica, en particular las senoidales y cosenoidales, así como de los conceptos, amplitud, periodo, frecuencia, desfase y desplazamiento, asociados a ellas.

EL PROBLEMA DE LA VARIACIÓN EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO (PARTE 1)

Si en un triángulo rectángulo se mantiene constante la longitud de la hipotenusa y se varía la medida de alguno de sus ángulos agudos, ¿qué pasará con las longitudes de los catetos, varían o permanecen constantes?

Para hacer un análisis de la situación, se puede en conjunto con los alumnos partir de una figura como la que aparece en la figura 1, donde se suponga que la longitud de la hipotenusa es h que permanecerá constante, y que el ángulo agudo de medida variable θ es el indicado en la figura, en donde además se representa a la longitud del cateto horizontal con la letra a, y a la longitud del cateto vertical con la letra b.

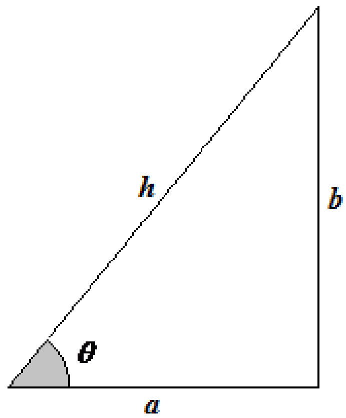


Figura 1

Se puede además sugerir una figura como la mostrada en la figura 2, con el propósito de tener una visualización de la variación de la medida θ del ángulo indicado en la figura 1, y a partir de ella plantear a los alumnos preguntas como las que le siguen.

En todo el desarrollo de la propuesta se plantea establecer un diálogo entre el profesor y los alumnos sobre la base de una serie de preguntas que guían el camino hacia la solución del problema.

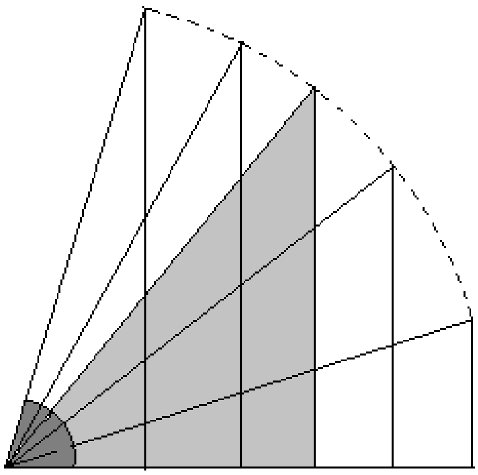


Figura 2

Preguntar:

1. Al variar la medida θ, ¿cambia la longitud del cateto horizontal?

2. Al variar la medida θ, ¿cambia la longitud del cateto vertical?

3. Cuando la medida θ disminuye, ¿qué sucede con la longitud del cateto horizontal?

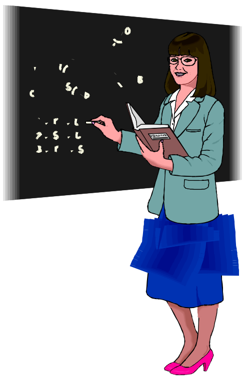
4. Cuando la medida θ aumenta, ¿qué sucede con la longitud del cateto horizontal?

5. Cuando la medida θ disminuye, ¿qué sucede con la longitud del cateto vertical?

6. Cuando la medida θ aumenta, ¿qué sucede con la longitud del cateto vertical?

7. ¿Cuáles son los posibles valores en radianes que podría tomar θ?

El análisis anterior permitirá concluir que las longitudes a y b de los catetos del triángulo de la figura 1 están variando y que además dependen de la medida θ del ángulo interior agudo indicado.



EL PROBLEMA DE LA VARIACIÓN EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO (PARTE 2)

Encuentra expresiones matemáticas que indiquen cómo se encuentran relacionadas las variables de la parte 1 del problema, la independiente θ con la dependiente a, y la independiente θ con la dependiente b.

Recordar que la longitud de la hipotenusa permanece constante.

Tomando como referencia el triángulo rectángulo de la figura 1, preguntar:

8. ¿Cómo se pueden relacionar la longitud a del cateto horizontal, la longitud h de la hipotenusa y la medida θ del ángulo agudo en el triángulo de la figura?

9. ¿Cómo se relacionan la longitud b del cateto vertical, la longitud h de la hipotenusa y la medida θ del ángulo agudo en el triángulo de la figura?

La primera dificultad que podría surgir es que algunos alumnos no recuerden qué concepto relaciona a la medida de un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo con las longitudes de un par de sus lados y cómo lo hace, por lo que habría de planearse alguna actividad o una breve discusión grupal donde se obtengan las seis formas distintas de relacionarlos para asignar sus nombres habituales, y no dar simplemente un listado de ellas, dando lugar a la introducción del primer concepto clave.

Concepto clave:

1. Razones trigonométricas

Si $\angle A$ es un ángulo interior agudo de un triángulo rectángulo y su medida es θ, entonces:

$$sen\ \theta = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

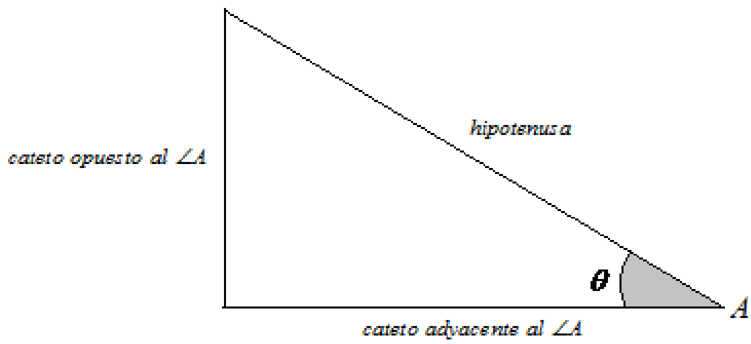
$$cos\ \theta = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}{longitud\ de\ la\ hipotenusa}$$

$$tan\ \theta = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}$$

$$cot\ \theta = \frac{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}$$

$$sec\ \theta = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ adyacente\ al\ \angle A}$$

$$csc\ \theta = \frac{longitud\ de\ la\ hipotenusa}{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ al\ \angle A}$$

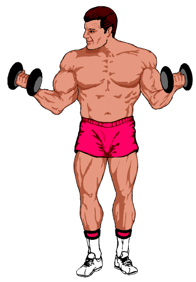


Se puede planear como trabajo extra clase para los alumnos, con el propósito de repasar y aplicar las definiciones de las razones trigonométricas, que comprueben a partir de ellas que se cumplen las siguientes identidades trigonométricas, que serán útiles en algún momento del desarrollo de la unidad.

a) Identidades recíprocas: $csc\,\theta = \dfrac{1}{sen\ \theta}$, $sec\,\theta = \dfrac{1}{cos\,\theta}$ y $cot\,\theta = \dfrac{1}{tan\,\theta}$

b) Identidades por cociente: $tan\,\theta = \dfrac{sen\ \theta}{cos\,\theta}$ y $cot\,\theta = \dfrac{cos\,\theta}{sen\ \theta}$

c) Identidades pitagóricas: $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, $tan^2\theta + 1 = sec^2\theta$ y $cot^2\theta + 1 = csc^2\theta$



Ejercicio 1

Si suponemos que en el triángulo rectángulo de la figura 1 quien permanece constante es la longitud a del cateto horizontal, entonces al variar la medida θ del ángulo sombreado también variarán las longitudes b y h, del cateto vertical y de la hipotenusa, respectivamente, y dichas longitudes dependerán de la medida θ del ángulo.

a) ¿Cuál será la expresión matemática que indica cómo se relacionan la variable independiente θ con la variable dependiente b?
b) Encuentra la expresión matemática que relaciona a la variable independiente θ con la variable dependiente h.

Es importante resaltar que la medida θ del ángulo puede ser en grados o en radianes, sin embargo la principal diferencia entre estos dos sistemas de medición, es que en el caso de los radianes, la medida será un número real x, lo cual resulta adecuado en el contexto del Cálculo Diferencial e Integral, ya que las funciones a considerar son funciones reales de variable real. Esta convención es la que libera a las funciones trigonométricas de los ángulos y de los triángulos rectángulos, logrando con esto un progreso en su tratamiento.

Considerando la respuesta a las preguntas **8** y **9**, tendremos que la expresión matemática que establece la relación entre la variable independiente θ y la variable dependiente a es $a = h \cdot cos\,\theta$, mientras que la relación que hay entre la variable independiente θ y la variable dependiente b, está dada por la expresión matemática $b = h \cdot sen\,\theta$.

A pesar que desde los cursos anteriores se ha venido trabajando con funciones, es posible que otra dificultad a enfrentar es que haya alumnos que aún tengan problema con el manejo del concepto de función y subconceptos asociados, así que éste sería un buen momento para retomarlos, haciendo una discusión general para concluir que en las expresiones obtenidas en parte 2 del problema de la variación en un triángulo rectángulo y en el ejercicio 1, se establecen relaciones de la variable independiente a la variable dependiente que son funciones, y que en particular son funciones trigonométricas con dominio restringido.

Preguntar:

10. ¿Cuándo una relación de la variable independiente a la variable dependiente es una función?

11. ¿Cuál es el nombre que recibe el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar la variable independiente?

12. ¿Con cuál nombre se identifica al conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente?

13. ¿Cómo se le llama a la expresión matemática que indica cómo asignar a cada valor de la variable independiente su correspondiente valor de la variable dependiente?

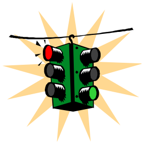
Como resultado de esta discusión y de la convención sobre la medida θ del ángulo se deberá concluir que las relaciones pedidas en el parte 2 del problema de la variación en un triángulo rectángulo, son las funciones trigonométricas $a(x)=h\cdot cos\ x$ y $b(x)=h\cdot sen\ x$, en particular si $h=1$ se obtienen las funciones $a(x)=cos\ x$ y $b(x)=sen\ x$, conocidas como la función básica coseno y la función básica seno, respectivamente.

De forma similar, con las respuestas al ejercicio 1 se pueden establecer la función básica tangente y la función básica secante.

En este momento se puede llevar a cabo una actividad donde se muestren las gráficas de las funciones básicas seno y coseno, para que los alumnos especifiquen las características solicitadas y queden establecidas como conceptos clave.

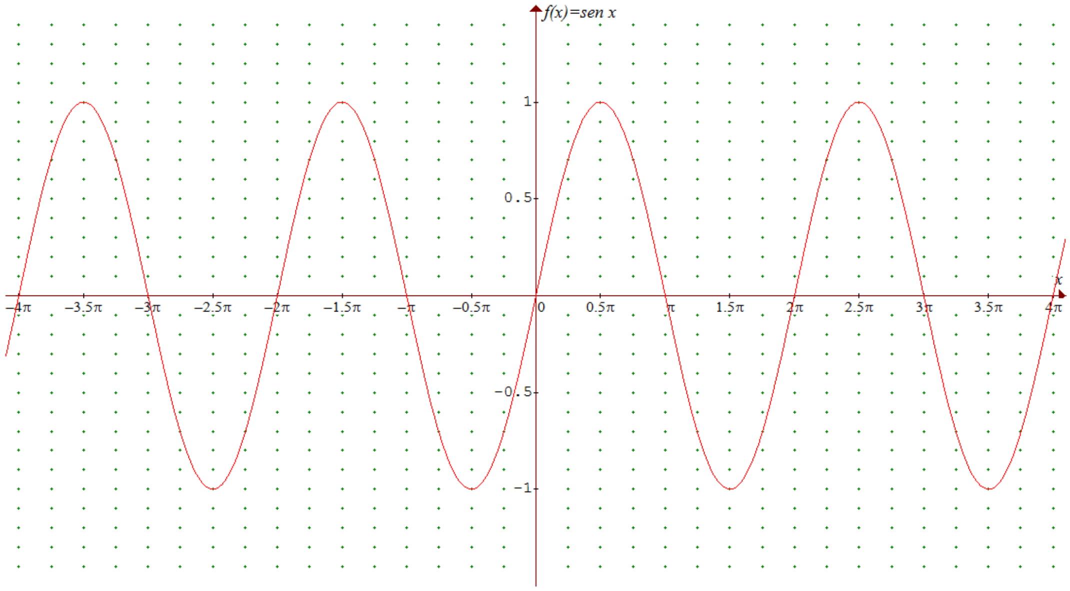
Actividad:

Completa los siguientes conceptos clave anotando las características indicadas debajo de las ondas graficadas.



Concepto clave

2. Gráfica de la función básica seno y sus características



Onda senoidal básica

1. Dominio:

2. Máximo:

3. Mínimo:

4. Rango:

5. Amplitud:

6. Periodo:

7. Frecuencia:

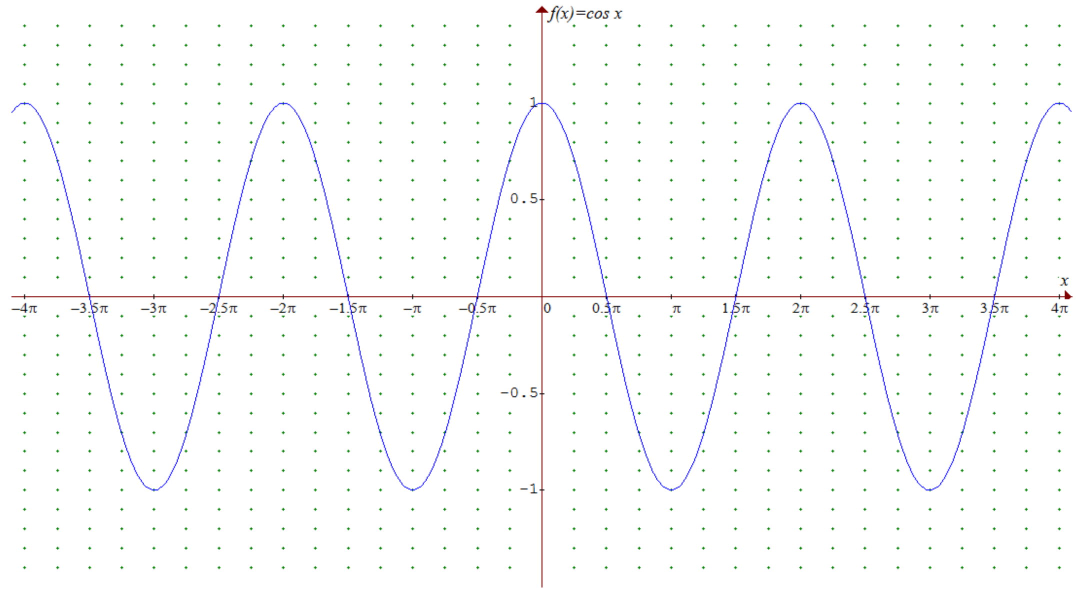
8. Intersección con el eje de ordenadas:

9. Intersección con el eje de abscisas (ceros):

10. ¿Es continua?

Concepto clave

3. Gráfica de la función básica coseno y sus características



Onda cosenoidal básica

1. Dominio:

2. Máximo:

3. Mínimo:

4. Rango:

5. Amplitud:

6. Periodo:

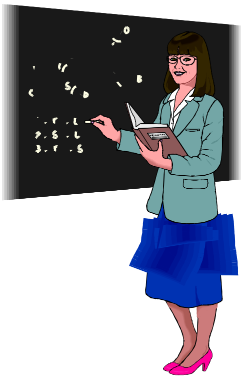
7. Frecuencia:

8. Intersección con el eje de ordenadas:

9. Intersección con el eje de abscisas (ceros):

10. ¿Es continua?

Por último proponer algún problema como el siguiente, donde se resumen las transformaciones que se pueden efectuar a la función básica coseno, hacer una generalización de ellas y presentarlas como conceptos clave, para la función seno y para la función coseno.



EL PROBLEMA DE LAS TRANSFORMACIONES

Considera la gráfica de la figura 3 para resolver lo siguiente:

a) Determina una expresión de la forma $f(x) = A \cdot cos\ (Bx \pm C) \pm D$ que corresponda a la onda graficada.

b) ¿Cuál será la expresión de la forma $f(x) = A \cdot sen\ (Bx \pm C) \pm D$ que produzca la misma gráfica?

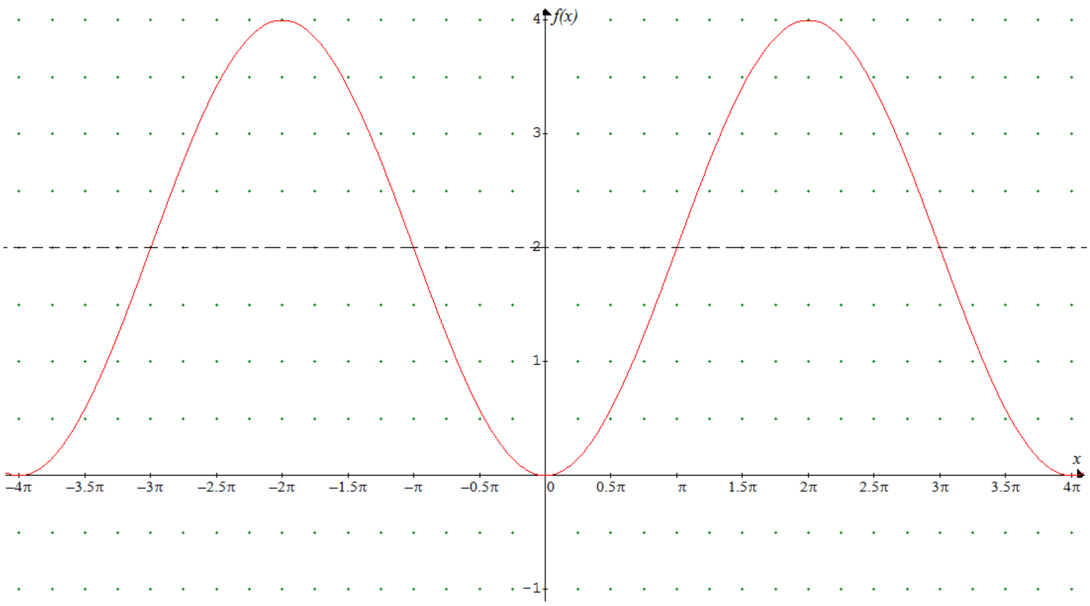


Figura 3

El análisis puede partir de la gráfica de la función básica coseno que aparece en la figura 4.

Si se toma como referencia la línea punteada horizontal que aparece en la figura 3, se observa que ésta se encuentra a dos unidades por arriba del eje de abscisas, lo cual indica que la onda cosenoidal básica fue desplazada dos unidades hacia arriba.

14. Preguntar:

¿Qué operación hay que realizar para lograrlo?

El resultado de la operación se muestra en la figura 5, donde aparece graficada la onda cosenoidal $cos\ x + 2$.

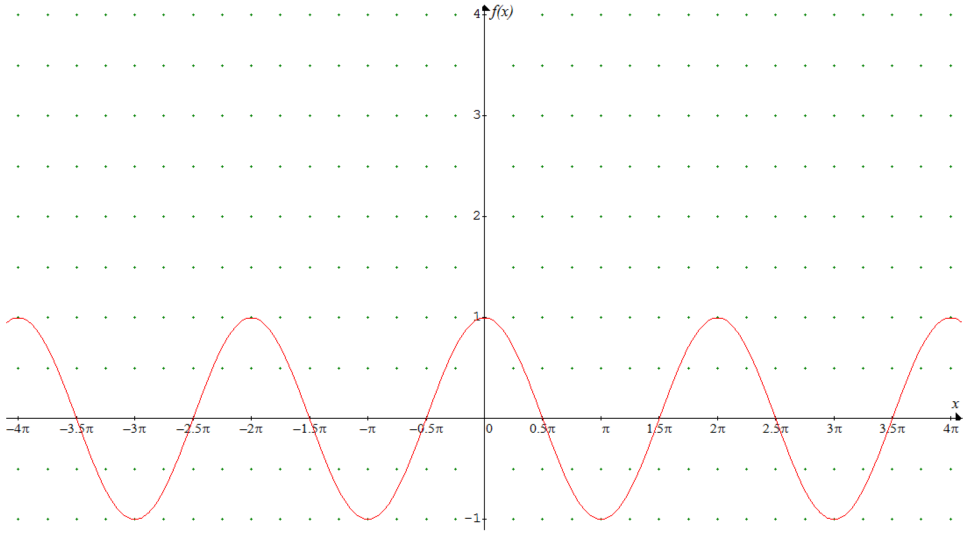


Figura 4 $f(x) = cos\ x$

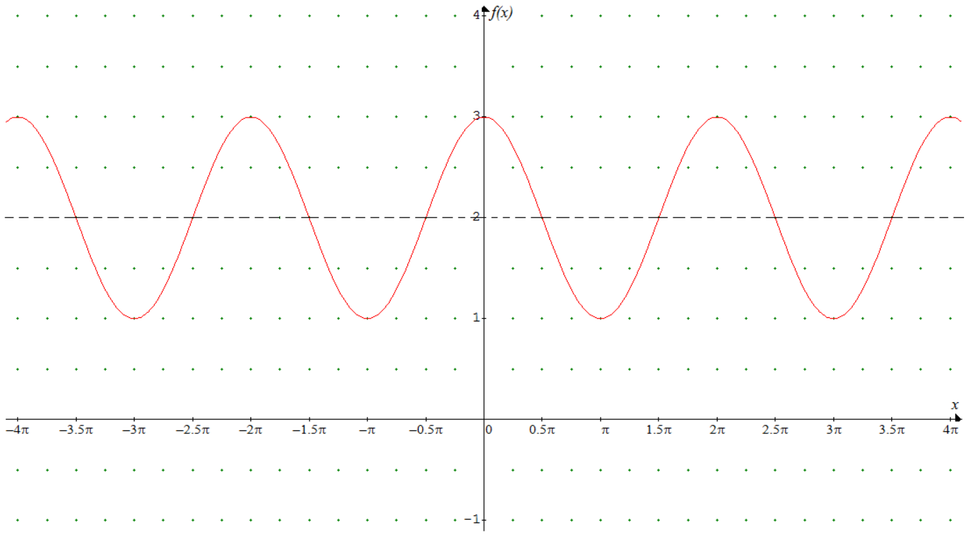


Figura 5 $f(x) = cos\ x + 2$

También tomando como referencia la línea horizontal punteada, se observa que además ha sido cambiada la amplitud de la onda cosenoidal básica a dos.

Preguntar:

15. ¿Con cuál operación se logra esta transformación?

En la figura 6 se muestra la transformación lograda con dicha operación.

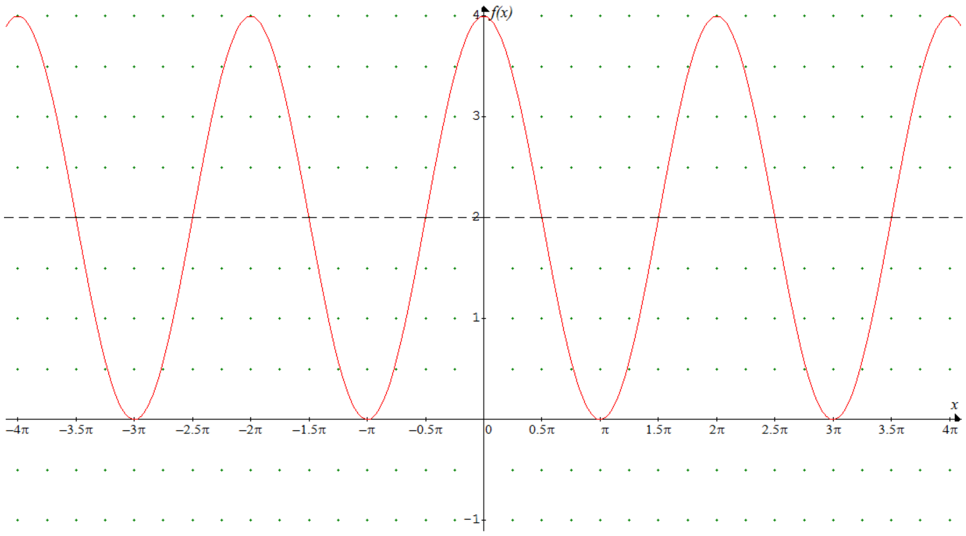


Figura 6 $f\left(x\right)=2\cdot cos\,x+2$

Realizando una observación cuidadosa, se pueden dar cuenta que la siguiente operación a realizar, podría ser desfasar la onda obtenida en la figura 6, π unidades a la derecha o a la izquierda.

Preguntar:

16. Si decidimos desfasarla a la derecha, ¿cuál sería la operación ha realizar?

En la figura 7 se tiene la onda cosenoidal $f\left(x\right)=2\cdot cos\left(x-\pi\right)+2$, resultado de la operación sugerida.

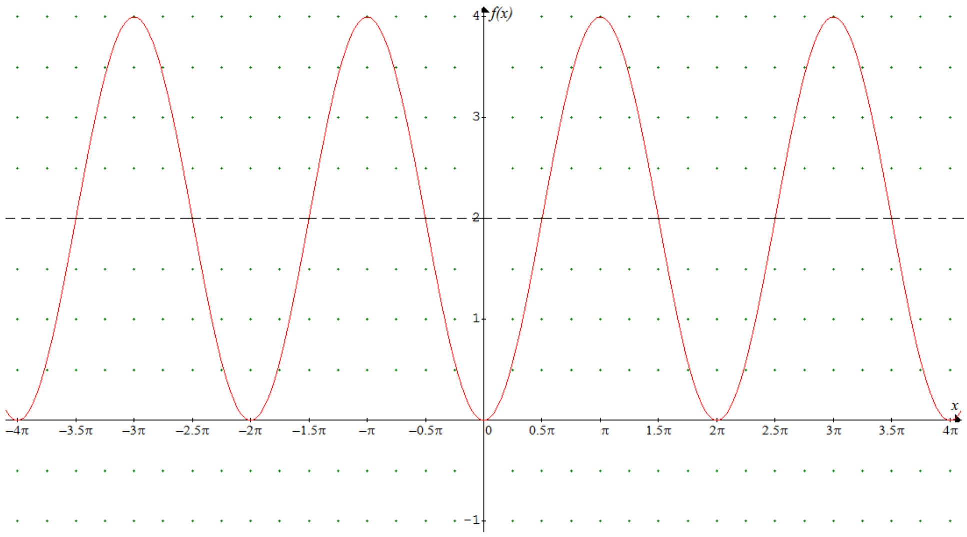


Figura 7 $f\left(x\right)=2\cdot cos\left(x-\pi\right)+2$

Por último, se modificaría el periodo de la onda cosenoidal de la figura 7 a 4π, observando que es precisamente el periodo de la onda graficada en la figura 3.

Preguntar:

17. ¿Cómo se logra esta transformación?

Así que la expresión pedida es $f(x) = 2 \cdot cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) + 2$ cuya gráfica es la que aparece en la figura 8.

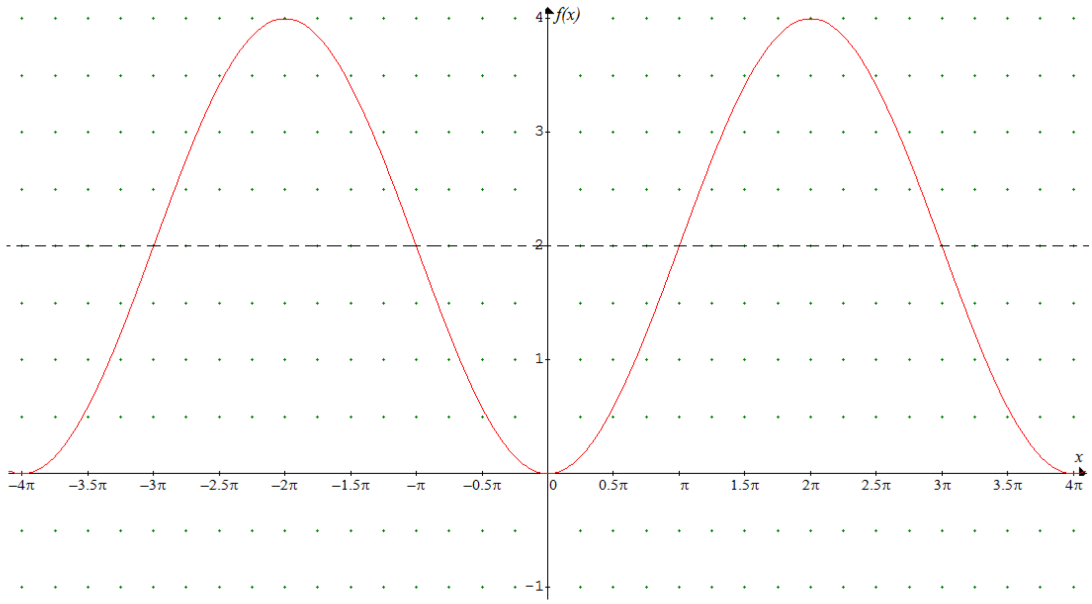


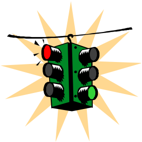
Figura 8 $f(x) = 2 \cdot cos\left(\frac{x}{2} - \pi\right) + 2$

Preguntar:

18. ¿Cómo convertimos la función cosenoidal a una función senoidal que sea equivalente?

Por lo tanto, la función como senoidal es $f(x) = 2 \cdot sen\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 2$.

Cabe señalar que la solución no es única, ya que por ejemplo si en la tercera operación hubiésemos decidido desfasarla a la izquierda, entonces los resultados finales serían $f(x) = 2 \cdot cos\left(\frac{x}{2} + \pi\right) + 2$ y $f(x) = 2 \cdot sen\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) + 2$.



Concepto clave:

4. Funciones seno y coseno generalizadas, sus características y equivalencias

a) Si los parámetros A, B, C y D son positivos, entonces las ondas correspondientes a la función senoidal generalizada $f(x) = A \cdot sen\,(Bx \pm C) \pm D$ y a la función cosenoidal generalizada $f(x) = A \cdot cos\,(Bx \pm C) \pm D$ tienen una amplitud A, un periodo $\frac{2\pi}{B}$, un desfase $\frac{C}{B}$ y un desplazamiento D.

El signo positivo en el argumento de la función indica un desfase de la onda hacia la izquierda, mientras que el signo negativo indica un desfase a la derecha.

El signo positivo del parámetro D indica un desplazamiento de la onda hacia arriba, y el signo negativo indica un desplazamiento hacia abajo.

b) La función senoidal $f(x) = A \cdot sen\,(Bx \pm C) \pm D$, es equivalente a la función cosenoidal $f(x) = A \cdot cos\left(Bx \pm C - \frac{\pi}{2}\right) \pm D$

c) La función cosenoidal $f(x) = A \cdot cos\,(Bx \pm C) \pm D$, es equivalente a la función senoidal $f(x) = A \cdot sen\left(Bx \pm C + \frac{\pi}{2}\right) \pm D$

Es conveniente que se les pida a los alumnos una lista de identidades trigonométricas, o bien quien imparte el curso puede proponer una con las identidades que planea utilizar a lo largo del semestre.