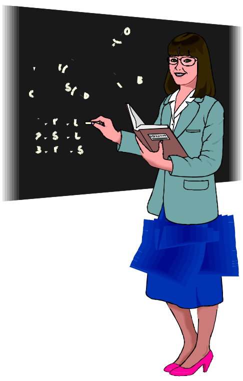
DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Sugerencias para quien imparte el curso:

Es importante que la interacción con los alumnos dentro del salón de clases sea lo más activa posible, para no caer en un esquema expositivo por parte del profesor o profesora, se debe crear en la clase una atmósfera donde los estudiantes se sientan a gusto para proponer y probar conjeturas e ideas, invitándolos constantemente a que expongan sus pensamientos en todas las etapas de la resolución de los problemas planteados.

Propósitos:

1. Conocer que se entiende por ángulo de intersección entre dos curvas y cómo calcular su medida.
2. Reformular el problema de encontrar la medida del ángulo de intersección entre dos rectas.
3. Introducir la idea de recta tangente como la mejor aproximación local de una curva.
4. Inducir a través de su gráfica, la regla para la derivada de la función básica exponencial natural.
5. Establecer por medio de la regla de la cadena, la regla para la derivada generalizada de la función exponencial natural.



EL PROBLEMA DEL ÁNGULO DE INTERSECCIÓN ENTRE DOS CURVAS

En la figura 1 aparecen graficadas la función $y = e^x$ y la función $y = x + 2$. Si las soluciones de la ecuación $e^x - x - 2 = 0$ son $x_1 = -1.84141$ y $x_2 = 1.14619$, calcula la medida en grados sexagesimales del ángulo formado por las gráficas en el punto común P.

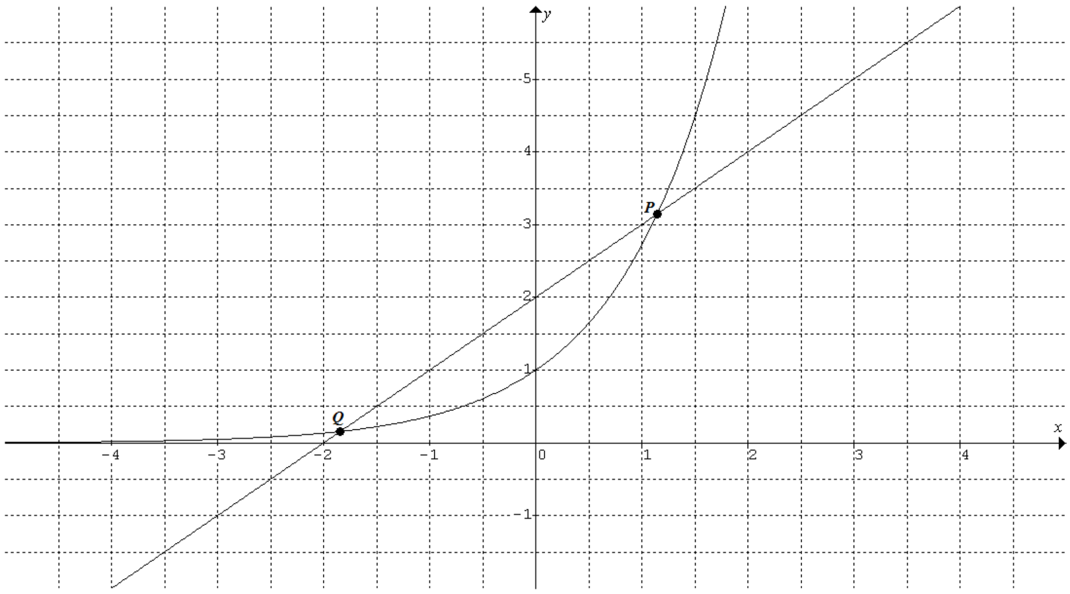


Figura 1

Preguntar:

1. ¿Qué tipo de función es la función $y = e^x$ y qué tipo de función es la función $y = x + 2$?

2. ¿Conoces alguna manera analítica que permita calcular la medida de ángulos en el plano cartesiano? ¿Cuál?

Se espera que en el interrogatorio salga a la luz la conocida fórmula para calcular la medida del ángulo formado por dos líneas rectas, si no es así replantear el problema para obtenerla.

Apoyándose de la figura 2 donde están graficadas, la recta n con una inclinación θ_1 y la recta l con una inclinación θ_2.

Preguntar:

3. Si se conocieran las medidas θ_1 y θ_2, ¿cómo encontrarías la medida θ del ángulo formado por las rectas?

4. Según las identidades trigonométricas de diferencia, ¿a qué es igual $tan(\theta_2 - \theta_1)$?

5. ¿Qué concepto se define como la tangente de la medida del ángulo de inclinación de una recta?

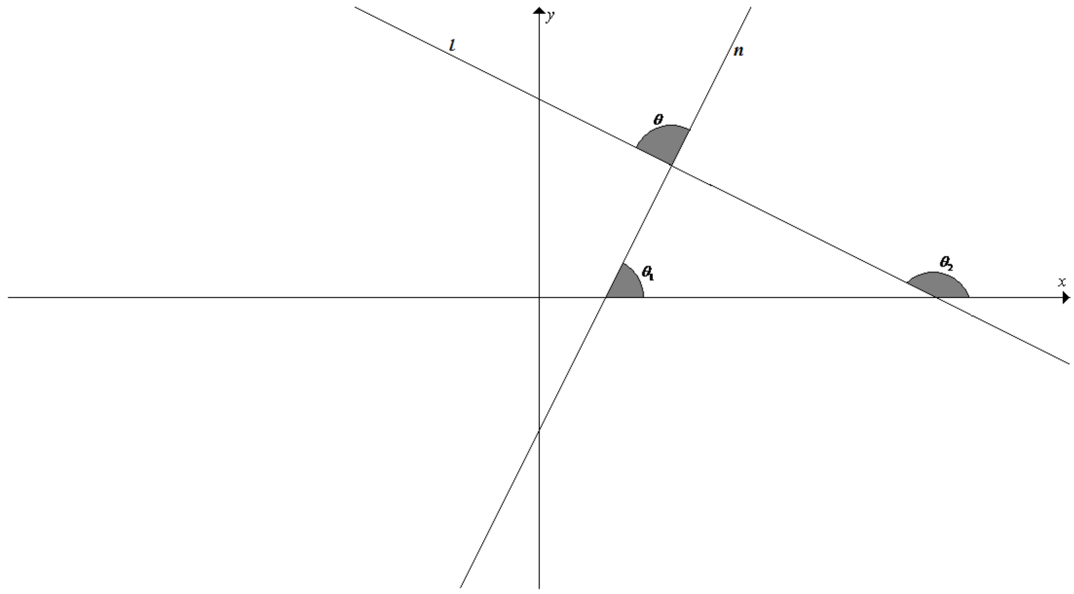


Figura 2

En conclusión, $\theta = tan^{-1}\left(\dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right)$ donde tan^{-1} es la función inversa de la tangente, y m_1 y m_2 son la pendiente del lado inicial y la pendiente del lado final, respectivamente, del ángulo medido en sentido positivo.

Ahora preguntar:

6. ¿Cómo se te ocurre aplicar este resultado en el caso del problema, donde solamente hay una línea recta?

7. Si sugieres introducir una recta más, ¿cuál sería la más adecuada?

Luego de escuchar propuestas, ratificar la respuesta correcta, enfatizando una vez más, que el valor de la derivada de una función en un punto, se interpreta geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto y sobre todo resaltar que tal recta es la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor del mencionado punto.

Presentar la figura 3 y preguntar:

8. ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta correspondiente a la función lineal del problema?

9. ¿Cómo se encontraría la pendiente de la recta tangente a la función exponencial natural del problema en el punto P?

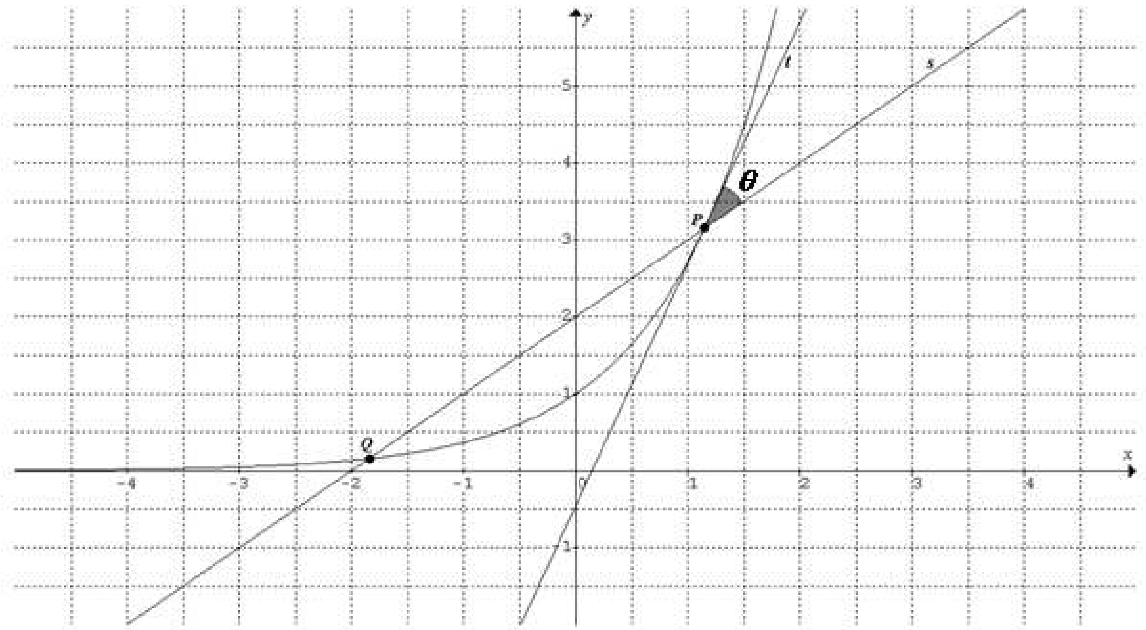


Figura 3

Es natural que en este momento surja en los alumnos la duda, ¿cómo encontrar la derivada de la función exponencial natural básica?

Para responder, proponer como actividad que se siga la misma estrategia utilizada para obtener las derivada de la función básica seno y de la función básica coseno.

Actividad:

En lo que sigue vas a obtener la derivada de la función $f(x)=e^x$ observando el bosquejo de su gráfica, la que construirás siguiendo lo indicado.

Para evaluar la derivada de $f(x)$ en el punto a, utiliza la definición de derivada en el punto a, $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

Preguntar:

10. Si la función es $f(x)=e^x$, entonces según la definición, ¿cuál será el límite que expresa su derivada en el punto a?

Completa la tabla de valores que aparece después de los ejemplos, localiza los puntos en el plano de la figura 4, donde está la gráfica de $f(x)=e^x$, y bosqueja la gráfica de $f'(x)$.

Insistir en que si $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, entonces existe $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ y es igual a $f'(a)$.

Sugerir que:

Para evaluar el $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{e^x - e^a}{x - a}$, tomen valores de $x=a-0.000001$ y para evaluar el $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{e^x - e^a}{x - a}$, tomen valores $x=a+0.000001$, como se ejemplifica a continuación:

Para $a=-2$

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{e^x-e^{-2}}{x-(-2)}=\frac{e^{-2-0.000001}-e^{-2}}{(-2-0.000001)-(-2)}=0.1353$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{e^x-e^{-2}}{x-(-2)}=\frac{e^{-2+0.000001}-e^{-2}}{(-2+0.000001)-(-2)}=0.1353$$

De esto se concluye que $f'(-2)=0.1353$

Para $a=0.5$

$$\lim_{x\to 0.5^-}\frac{e^x-e^{0.5}}{x-0.5}=\frac{e^{0.5-0.000001}-e^{0.5}}{(0.5-0.000001)-0.5}=1.6487$$

$$\lim_{x\to 0.5^+}\frac{e^x-e^{0.5}}{x-0.5}=\frac{e^{0.5+0.000001}-e^{0.5}}{(0.5+0.000001)-0.5}=1.6487$$

De donde $f'(0.5)=1.6487$

a	$\lim\limits_{x\to a^-}$	$\lim\limits_{x\to a^+}$	$f'(a)$	Punto de $f'(x)$
-2	0.1353	0.1353	0.1352	$A(-2, 0.1353)$
-1.5				
-1				
-0.5				
0				
0.5	1.6487	1.6487	1.6487	$F(0.5, 1.6487)$
1				
1.5				
2				

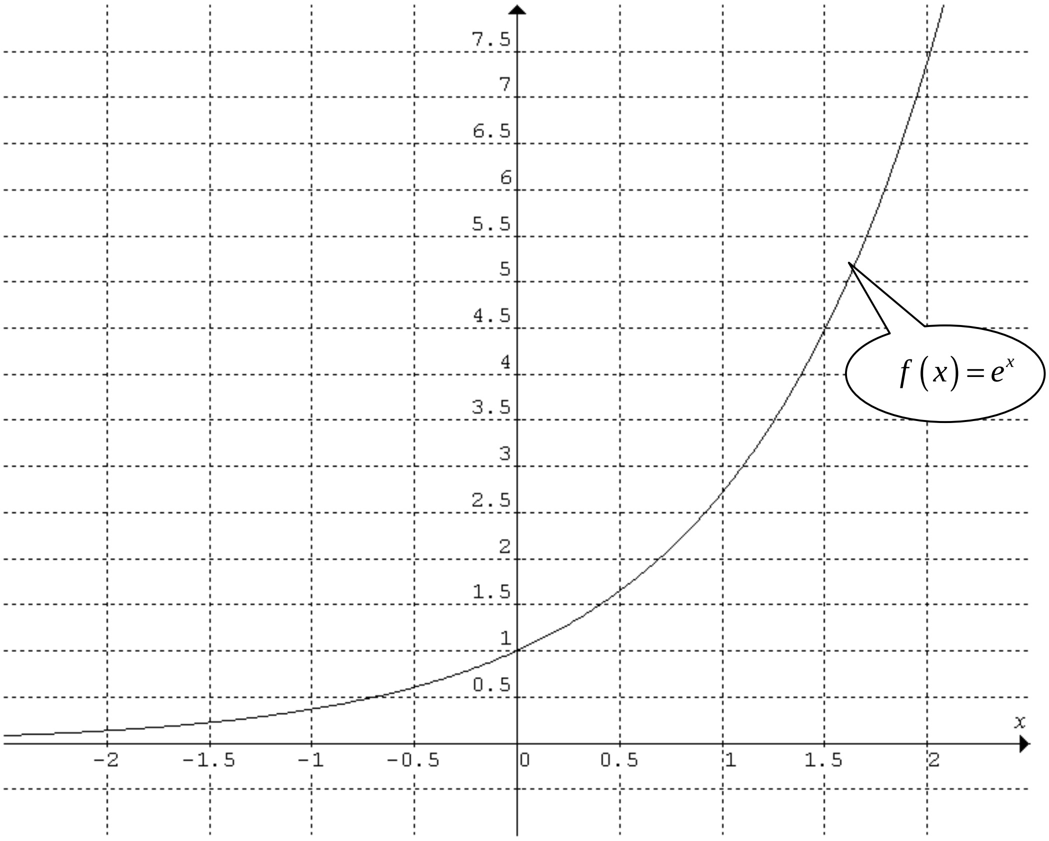


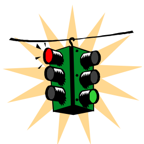
Figura 4

A manera de conjetura, según la gráfica bosquejada, propón una función $F(x)$ como la derivada de $f(x)$.

Para probar tu conjetura, evalúa $F(x)$ con los valores de $x=a$ dados en la tabla y observa que en todo caso coincida con el valor de $f'(a)$ correspondiente.

Si se cumple que para todo valor a de la tabla $F(a)=f'(a)$, entonces puedes concluir que la función $F(x)$ que propusiste es en efecto la derivada de la función $f(x)=e^x$.

Finalmente, exponer la conclusión de la actividad como un concepto clave.



Concepto clave:

17. Derivada de la función básica exponencial natural

Si $f(x)=e^x$, entonces $f'(x)=e^x$, o con las otras notaciones; $\dfrac{d\ e^x}{dx}=e^x$ o $D_x\left(e^x\right)=e^x$.

Volviendo al problema inicial, preguntar:

11. Si $f(x)=e^x$ y $g(x)=x+2$, ¿cuáles son las funciones $f'(x)$ y $g'(x)$?

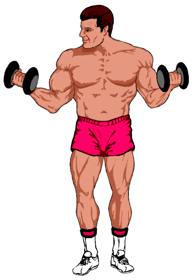
12. ¿Cuál es el valor de la abscisa del punto P?

13. ¿Cuál es el valor de $f'(1.14619)$ y de $g'(1.14619)$?

Solicitar que para responder al problema, calculen la medida en grados sexagesimales del ángulo pedido, mediante la evaluación de:

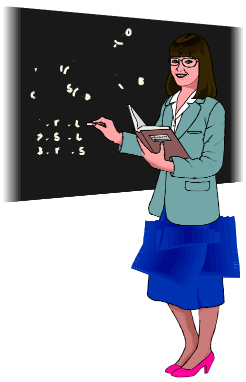
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{f'(1.14619)-g'(1.14619)}{1+g'(1.14619)\cdot f'(1.14619)}\right)$$

Establecer que en general, por ángulo de intersección formado por dos curvas, se entiende al ángulo que forman entre si las rectas tangentes a esas curvas en un punto en común P.



Ejercicio 1

Calcula la medida en grados sexagesimales del ángulo formado por las funciones del problema del ángulo entre dos curvas, en el punto común Q, ver la figura 1.



EL PROBLEMA DE LOS VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

Encuentra los valores máximo y mínimo de la función $f(x) = e^{sen\ x}$ en el intervalo $(0, 2\pi)$, cuya gráfica aparece en la figura 5.

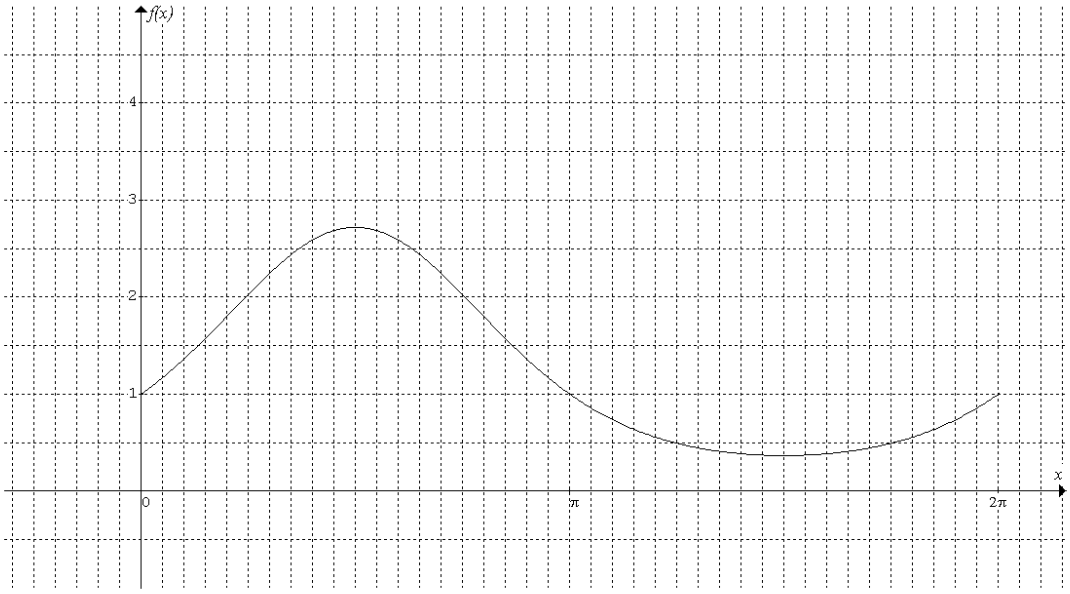
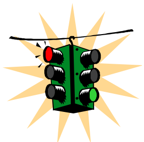


Figura 5

Al aplicar el criterio de la segunda derivada, en su primer paso los alumnos tendrán que derivar la función $f(x) = e^{sen\ x}$, donde surgirá de manera natural la pregunta, ¿qué hacer si el exponente es una función de x distinta de la identidad?

Como en los casos anteriores, primero pedir que apliquen la regla de la cadena para encontrar la derivada, considerando a $f(x)$ como la composición de las funciones $g(x)=e^x$ y $h(x)=sen\,x$, es decir que $f(x)=g(h(x))$, posteriormente generalizar el resultado para introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

18. Derivada generalizada de la función exponencial natural

Si u es una función derivable de x, entonces la derivada de e^u está dada por:

$$\frac{d\ e^u}{dx}=\left(\frac{d\ e^u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(e^u\right)\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Los ceros reales de la primera derivada obtenida en el primer paso, se obtendrán al resolver la ecuación $\left(e^{sen\,x}\right)(cos\,x)=0$.

Primero dar tiempo para que los alumnos traten de resolverla, si después de un tiempo razonable no ha sido posible, entonces orientar cómo resolverla dando algunas sugerencias que podrían surgir al preguntar:

14. ¿Cuándo el producto de dos números es igual a cero?

15. Observa la figura 5 y responde ¿podrá ser el factor $e^{sen\,x}$ igual a cero en el intervalo $(0,2\pi)$? ¿Por qué?

16. Remítete a la gráfica de la función básica coseno y responde, ¿para qué valores de x en el intervalo $(0,2\pi)$, se cumple la igualdad $cos\,x=0$?

17. ¿Cuáles son las raíces reales de la ecuación $\left(e^{sen\,x}\right)(cos\,x)=0$?

18. ¿Cuáles son los valores críticos de la función $f(x)=e^{sen\,x}$ en el intervalo $(0,2\pi)$?

19. ¿Cuál es el siguiente paso en el procedimiento del criterio de la segunda derivada?

Permitir que los alumnos obtengan la segunda derivada y solo verificar que el resultado obtenido es el correcto:

$$f''(x)=e^{sen\,x}\cdot\left(cos^2x-sen\,x\right)$$

Preguntar:

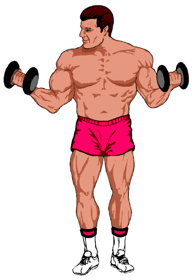
20. ¿Cuál es el valor de $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ y el de $f''\left(\frac{3\pi}{2}\right)$?

21. ¿La función tiene máximo o mínimo en $x=\frac{\pi}{2}$? ¿Cuál es su valor?

22. ¿La función tiene máximo o mínimo en $x=\frac{3\pi}{2}$? ¿Cuál es su valor?

Ejercicio 2

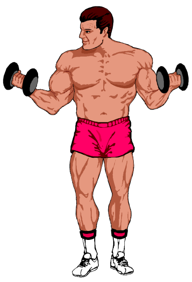
Determina en su forma general, la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función exponencial natural $y=e^{1-x^2}$, en los puntos donde se intersecta con la recta $y=1$.



Ejercicio 3

Hay ecuaciones llamadas ecuaciones diferenciales, cuya incógnita es una función, en la unidad 4 del curso las estudiarás con detalle.

Verifica que la función $y=e^{2x}\cdot sen\ 5x$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2}-4\left(\frac{dy}{dx}\right)+29y=0$.



Ejercicio 4

Si $h(x)=e^{x}\cdot sen\ x$, encuentra el valor de $h(0)$, el de $h'(0)$, el de $h''(0)$ y el de $h'''(0)$.

Por último, planear la resolución de ejercicios con la intención de practicar la algoritmia, sin olvidar mostrar detalladamente la de algunos de ellos.