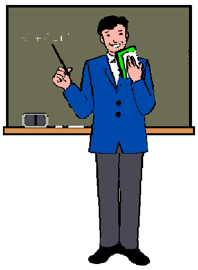
DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL DE CUALQUIER BASE Y DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMO NATURAL



Sugerencias para quien imparte el curso:

Se deberá concebir a la Matemática como una actividad social y cultural, en la que el conocimiento no se descubre, sino que se construye a partir de la formulación y justificación de conjeturas, a través de la búsqueda de patrones y regularidades, para que así se convierta a la enseñanza de instrucción a socialización, y al aprendizaje de recepción a construcción.

Propósitos:

1. Reconocer cuándo una función exponencial describe un crecimiento o un decaimiento.
2. Reafirmar cómo se resuelve una ecuación exponencial.
3. Recordar el procedimiento de la derivación implícita, para obtener la regla para la derivada de la función básica exponencial de cualquier base.
4. Inferir la regla para la derivada de la función básica logaritmo natural, a través de identificar cierta regularidad en casos particulares.
5. Obtener por medio de la regla de la cadena, la regla para la derivada generalizada de las funciones exponencial de cualquier base y logaritmo natural.

EL PROBLEMA DE LAS BACTERIAS ESCHERICHIA COLI

Las bacterias escherichia coli (e-coli) se pueden encontrar en la vejiga de los seres humanos, provocando en algunos casos una infección del tracto urinario (ITU). Suponiendo que a una persona se le detectan de inicio $(t=0)$ 2000 de estas bacterias en la vejiga y que el número de bacterias presentes t minutos después puede determinarse con la función $f(t)=2000\left(2^{0.05t}\right)$, responde lo siguiente:

a) ¿Cuántas bacterias e-coli tendrá a los quince minutos?
b) Si se considera que ya existe una ITU cuando se encuentren $120,000$ bacterias e-coli, ¿cuánto tiempo tardará en desarrollar la infección?
c) ¿A qué velocidad está aumentando el número de bacterias e-coli a los diez minutos?

Preguntar:

1. ¿Qué tipo de función es $f(t)$?

2. ¿La función describe un crecimiento o un decaimiento? ¿Por qué?

Es muy probable que la mayoría de alumnos respondan correctamente y sin dificultad el inciso a, así que habrá que esperar a que den la respuesta para poder continuar.

También dar un tiempo para que los alumnos respondan el inciso b, sin embargo puede darse el caso que los alumnos no recuerden cómo resolver una ecuación exponencial, así que para solucionar esta dificultad se sugiere que quien imparte el curso coordine los pasos para su resolución, escuchando propuestas del grupo, aprovechando las correctas y rechazando las incorrectas.

Preguntar:

3. ¿Cuál función convendrá obtener para responder el inciso c?

No es difícil que a esta altura del curso, la mayoría de los alumnos respondan que con la derivada de la función $f(t)$.

$$\frac{d\,f(t)}{dt} = (2000)\left(\frac{d\ 2^{0.05t}}{dt}\right)$$

Nuevamente enfrentamos a los alumnos a la necesidad de construir nuevos conocimientos, porque en la expresión anterior ¿a qué es igual el factor $\frac{d\ 2^{0.05t}}{dt}$?

Hasta ahora sólo se conocen fórmulas para derivar la función exponencial natural, así que a continuación se presenta una actividad con una secuencia de pasos para obtener las fórmulas para derivar una función exponencial de base positiva a distinta de uno.

Actividad:

Completa donde se indica para obtener una fórmula para derivar funciones exponenciales de la forma $f(x) = a^x$, con base a positiva distinta de uno.

a) Sustituye $f(x)$ por y.

b) Aplica logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad.

Hacer notar que en el resultado, y queda definida como función implícita de x.

c) Aplica la propiedad de logaritmos adecuada al segundo miembro de la igualdad.

d) Deriva el resultado implícitamente, respecto a x.

En este punto podría presentarse una dificultad, puesto que es posible que los alumnos no hayan trabajado este tipo de derivación en el curso anterior, así que será labor de quien imparte el curso explicar el procedimiento a seguir, que se resume como sigue: "Derivar ambos miembros de la igualdad, término a término, considerando a y como una función de x, y del resultado despejar a $\frac{dy}{dx}$".

$$\frac{d\,ln\,y}{dx}=\frac{d\left(x\cdot ln\,a\right)}{dx}$$

Solicitar que apliquen la regla de la cadena para derivar el primer miembro de la igualdad y que observen al derivar el segundo miembro que $ln\,a$ es una constante.

$$\left(\frac{d\,ln\,y}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)=ln\,a$$

Volvemos a la situación de enfrentar al alumno a algo desconocido, porque ¿a qué es igual $\frac{d\,ln\,y}{dy}$?

Como de momento no se tiene alguna regla que permita responder tal cuestión, la propuesta es utilizar el límite de Fermat $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ como sigue:

Si $f(x)=ln\,x$, entonces $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{ln\,x-ln\,a}{x-a}$.

No está de más insistir de nueva cuenta que para que exista, en este caso el $\lim\limits_{x\to a}\frac{ln\,x-ln\,a}{x-a}$, es necesario que los límites laterales sean iguales.

Hacer la sugerencia que para evaluar el $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{ln\,x-ln\,a}{x-a}$, tomen valores $x=a-0.0000000001$, y que consideren valores $x=a+0.0000000001$ para evaluar el $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{ln\,x-ln\,a}{x-a}$.

Por ejemplo, para encontrar el valor de $f'(1)$:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{ln\,x-ln\,1}{x-1}=\frac{ln\left(1-0.0000000001\right)-ln\,1}{\left(1-0.000000001\right)-1}=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \frac{\ln(1+0.0000000001) - \ln 1}{(1+0.000000001)-1} = 1$$

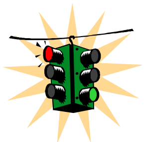
De esto se concluye que $f'(1) = 1$

Procediendo de manera semejante, solicitar a los alumnos que encuentren los valores para $f'(4)$, $f'(5)$, $f'(8)$, $f'(16)$ y $f'(20)$, cuidando que lleguen a los resultados correctos que son $f'(4) = \frac{1}{4}$, $f'(5) = \frac{1}{5}$, $f'(8) = \frac{1}{8}$, $f'(16) = \frac{1}{16}$ y $f'(20) = \frac{1}{20}$.

Posteriormente, preguntar:

4. ¿Hay alguna regularidad en los resultados obtenidos? ¿Cuál?

A partir de la regularidad observada concluir y establecer el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

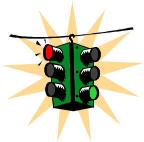
19. Derivada de la función básica logaritmo natural

Si $f(x) = \ln x$, entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$, o con las otras notaciones; $\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x}$ o $D_x(\ln x) = \frac{1}{x}$.

Volviendo a la derivación implícita para obtener la derivada de $f(x) = a^x$, ya se puede responder la pregunta, ¿a qué es igual $\frac{d \ln y}{dy}$?

De la respuesta correcta a la pregunta anterior, concluir que $\frac{dy}{dx} = (y)(\ln a)$

e) Finalmente para obtener la derivada de $f(x) = a^x$, sustituir en la última expresión y por a^x y exhibirla como un nuevo concepto clave,



Concepto clave:

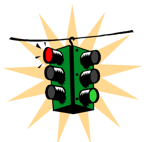
20. Derivada de la función básica exponencial de base *a*

Si $f(x)=a^x$ con base positiva distinta de uno, entonces $f'(x)=a^x \cdot \ln a$, o con las otras notaciones; $\frac{d\,a^x}{dx}=a^x \cdot \ln a$ o $D_x\left(a^x\right)=a^x \cdot \ln a$

Preguntar:

5. ¿Se podrá aplicar esta regla a la función del problema de las bacterias escherichia coli ? ¿Por qué?

De la respuesta a esas preguntas se hace necesario generalizar la regla introducida en el concepto clave 20, esto se logrará aplicando la regla de la cadena a la función $f(x)=a^u$, considerada como la composición de las funciones $g(x)=a^x$ y $h(x)=u$, y con ello introducir el concepto clave siguiente.

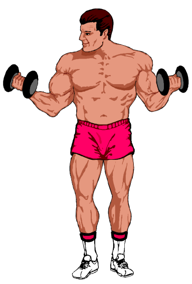


Concepto clave:

21. Derivada generalizada de la función exponencial de base *a*

Si $f(x)=a^u$ donde a es un número positivo distinto de uno y u es una función derivable de x, entonces

$$\frac{d\,a^u}{dx}=\left(\frac{d\,a^u}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(a^u \cdot \ln a\right)\left(\frac{du}{dx}\right)$$



Ejercicio 1.

Aplicando el concepto clave 21, obtén la derivada de la función $f(t)=2000\left(2^{0.05t}\right)$ del problema de las bacterias e-coli y responde el inciso c.

Ejercicio 2.

En la figura 1 tienes la gráfica de la función $y = ln\, x$, encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal en el punto de intersección con el eje de abscisas y trázalas en el plano de la figura.

.

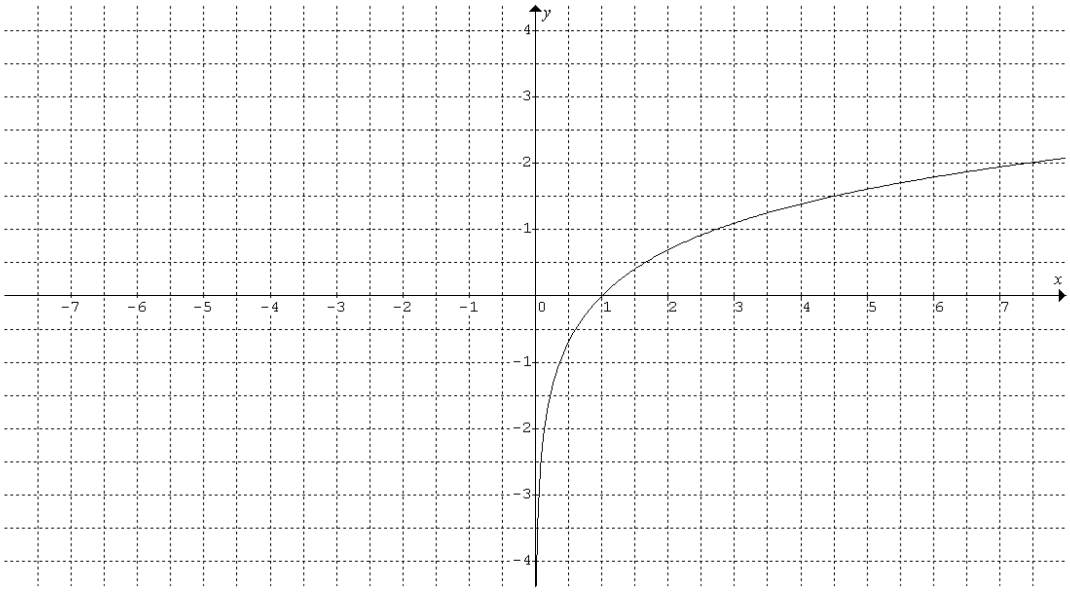
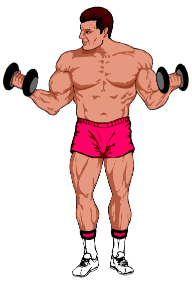


Figura 1



Ejercicio 3.

Si u es una función derivable de x, construye por medio de la regla de la cadena el **concepto clave 22** que corresponderá a la derivada generalizada de la función logaritmo natural, es decir la derivada de $f(x) = ln\, u$.

Finalmente proponer ejercicios para reforzar la parte algorítmica, sin perder de vista que no sea el trabajo prioritario, porque como ya se ha mencionado, no deberá quedar relegado a segundo término la interpretación geométrica de la derivada, ni omitir su significado físico.