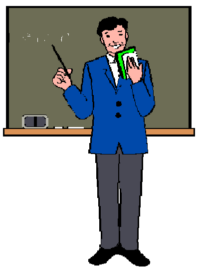
DERIVADA DE LA FUNCIONES BÁSICAS TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE

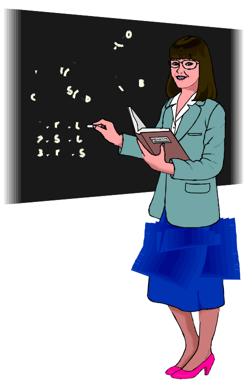


Sugerencias para quien imparte el curso:

En esta sección de la propuesta didáctica se parte de plantear un problema de optimización en los que los recursos del álgebra resultan insuficientes, en todas las secciones es trascendental que en todo el proceso de búsqueda a la solución del problema planteado de inicio, el alumno participe activamente en él, donde no solamente será importante llegar a la solución, sino también promover la habilidad para resolver de manera independiente problemas en general, por lo tanto en la estrategia de enseñanza y aprendizaje se deberá dar prioridad al desarrollo de procesos del pensamiento matemático, evitando la sola transferencia de contenidos, para lo cual resultará indispensable planear las tareas, actividades y preguntas que posibiliten la resolución de problemas con la participación activa de los estudiantes, apoyados por parte del profesor o profesora para ayudarlos a pensar y orientarlos hacia una solución.

Propósitos:

1. Reafirmar el procedimiento para encontrar los valores extremos de una función en un intervalo.
2. Deducir las reglas para la derivada de las funciones básicas tangente, cotangente, secante y cosecante, a partir de la derivada de las funciones básicas seno y coseno.



EL PROBLEMA DE LA VIGA

Se solicita reforzar una pared por medio de una viga que debe pasar sobre otra pared más baja que se encuentra a cuatro metros de la pared que será reforzada, como se muestra en el modelo geométrico de la figura 1.

Si la altura de la pared más baja es de dos metros, encuentra la longitud l de la viga más corta que se puede usar.

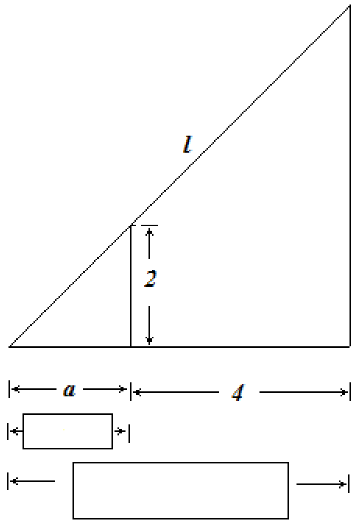
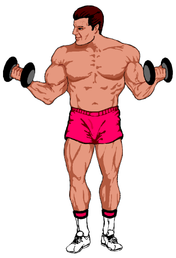


Figura 1

Preguntar:

1. ¿De qué dependerá la longitud de la viga?

Solicitar que se represente con la letra x, y que se anote en la figura 1.



Ejercicio 1.

Con el triángulo rectángulo pequeño de la figura 1 y la razón trigonométrica cotangente, expresa la longitud del segmento a en términos de la medida x del ángulo de elevación de la viga y anótale en el recuadro correspondiente en la figura.

Preguntar:

2. Según la respuesta del ejercicio 1, ¿cuál será la expresión para la longitud del cateto horizontal del triángulo rectángulo grande?

Pedir que se anote en el recuadro correspondiente de la figura 1.

Ejercicio 2.

Con el triángulo rectángulo grande de la figura 1 y la razón trigonométrica secante, escribe la expresión correspondiente a la longitud l de la viga.

De la respuesta al ejercicio 2, se establece que como la longitud l de la viga depende de la medida x de su ángulo de elevación, la relación de la variable independiente a la dependiente estará dada por la función:

$$l(x) = (\sec x)(2 \cdot \cot x + 4)$$

Preguntar:

3. Según las condiciones del problema, ¿cuál será en este caso el dominio a considerar para la función construida?

En lo que sigue se podrá trabajar con la función $l(x) = (\sec x)(2 \cdot \cot x + 4)$ o con su equivalente $l(x) = 2 \cdot \csc x + 4 \cdot \sec x$ cuya gráfica con dominio restringido el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ se expone en la figura 2.

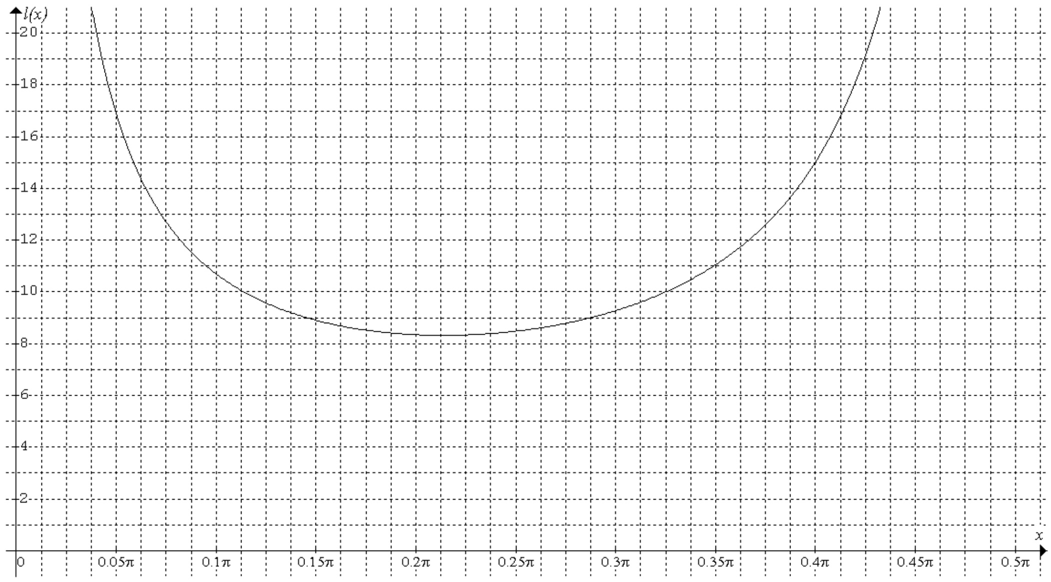


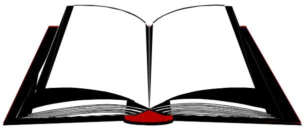
Figura 2

Al mostrar la gráfica a los alumnos, éstos se podrán percatar que la función $l(x)$ tiene mínimo en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Preguntar:

4. ¿Cuáles métodos ofrece el Cálculo Diferencial para obtener el mínimo o el máximo de una función continua definida sobre un intervalo?

La dificultad que podría surgir, es que algunos alumnos no recuerden los métodos pedidos, por lo tanto es recomendable que se reconstruya alguno de ellos en colaboración del grupo, el consejo es que sea el criterio de la segunda derivada, por ser el más práctico de aplicar en los problemas que se exponen, sin embargo queda a consideración de quien imparte el curso formular el criterio de la primera derivada.



PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR LOS VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN CONTINUA DEFINIDA SOBRE UN INTERVALO (CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA)

Recordar que los valores extremos de una función son los valores mínimos o máximos relativos o absolutos de la función.

Paso 1. Encontrar la primera derivada de la función.

Paso 2. Determinar los valores críticos de la función, que pueden ser:

a) Los ceros reales de la primera derivada.
b) Los valores donde no está definida la primera derivada.
c) Los extremos del intervalo, si es cerrado.

Nota 1: Los valores extremos de la función solamente ocurren en valores críticos sobre el intervalo dado, sin embargo, no necesariamente tiene un valor extremo en cada valor crítico.

Nota 2: A pesar que un valor crítico podría ser cualquier valor de los casos anotados, en el desarrollo de la unidad solo se consideran procesos en los que se cumple exclusivamente el primero de ellos, de tal manera que el siguiente paso será aplicar el criterio de la segunda derivada.

Paso 3. Encontrar la segunda derivada de la función, evaluarla en los ceros reales de la primera derivada y tomar la decisión, según lo siguiente:

a) Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)>0$, entonces $f(x)$ tendrá el valor mínimo $f(x_0)$.

b) Si $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)<0$, entonces $f(x)$ tendrá el valor máximo $f(x_0)$.

Se deja a consideración de quien imparte el curso, comentar qué hacer cuando $f''(x_0)=0$ o no existe.

Para continuar con el problema de la viga, se considerará a la función $l(x)$ como $l(x)=2\cdot csc\,x+4\cdot sec\,x$ a la que se le aplicará, tal como se sugiere, el criterio de la segunda derivada.

Paso 1. $I'(x) = 2 \cdot \frac{d\ csc\ x}{dx} + 4 \cdot \frac{d\ sec\ x}{dx}$

Es de esperarse que en este momento, el alumno asuma que lo que sabe no le es suficiente y que necesita construir un nuevo conocimiento para avanzar en la resolución del problema, porque ¿cuál será la derivada de la función básica cosecante y de la función básica secante?

Con el fin de que el alumno construya nuevos conocimientos a partir de los previos, preguntar:

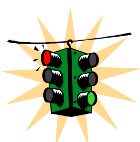
5. ¿Será posible determinar la derivada de la función básica secante y de la función básica cosecante, a partir de las derivadas de la función básica seno y de la función básica coseno ya conocidas? ¿Cómo?

Mostrar a manera de ejemplo cómo obtener la derivada de la función básica secante y formular el resultado como un concepto clave.

Puesto que por identidad trigonométrica recíproca, se cumple que $f(x) = sec\ x = \frac{1}{cos\ x}$, se concluye que la derivada de la función básica secante estará dada al derivar la razón $\frac{1}{cos\ x}$.

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{d\ 1}{dx}\right)(\cos x) - (1)\left(\frac{d\ cos\ x}{dx}\right)}{cos^2 x} = \frac{(0)(cos\ x) - (1)(-sen\ x)}{cos^2 x} = \frac{sen\ x}{cos^2 x}$$

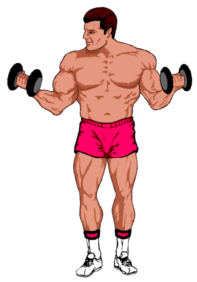
Dado que la razón $\frac{sen\ x}{cos^2 x}$ se puede expresar como el producto $\frac{1}{cos\ x} \cdot \frac{sen\ x}{cos\ x}$, concluir que $f'(x) = sec\ x \cdot tan\ x$.



Concepto clave:

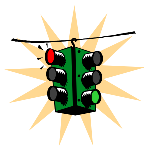
7. Derivada de la función básica secante

Si $f(x) = sec\ x$, entonces $f'(x) = sec\ x \cdot tan\ x$, o con las otras notaciones; $\frac{d\ sec\ x}{dx} = sec\ x \cdot tan\ x$ o $D_x(sec\ x) = sec\ x \cdot tan\ x$.



Ejercicio 3

Considerando que $csc\,x = \frac{1}{sen\,x}$, verifica que es cierto lo plasmado en el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

8. Derivada de la función básica cosecante
Si $f(x) = csc\,x$, entonces $f'(x) = -csc\,x \cdot cot\,x$, o con las otras notaciones; $\frac{d\ csc\,x}{dx} = -csc\,x \cdot cot\,x$ o $D_x(csc\,x) = -csc\,x \cdot cot\,x$.

Una vez que se implantaron los conceptos clave 8 y 9, los alumnos podrán obtener sin dificultad que $I'(x) = 4 \cdot sec\,x \cdot tan\,x - 2 \cdot csc\,x \cdot cot\,x$.

Paso 2. Obtener valores críticos, lo cual se logra al resolver la ecuación $4 \cdot sec\,x \cdot tan\,x - 2 \cdot csc\,x \cdot cot\,x = 0$

Es muy probable que después de dar un tiempo para resolverle, los alumnos no lo logren, así que la recomendación es solucionarla conjuntamente con ellos, dando sugerencias de pasos consecutivos, dejando que ellos los lleven a cabo y verificando que los resultados sean correctos.

Por ejemplo, una secuencia de pasos podría ser la siguiente, o la que considere quien imparte el curso.

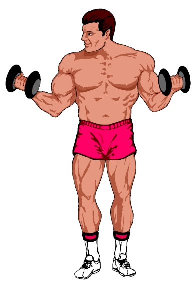
1. Divide entre dos.
2. Convierte la ecuación a una que contenga solamente senos y cosenos, utilizando las identidades trigonométricas adecuadas.
3. Multiplica por $sen^2 x \cdot cos^2 x$.
4. Suma $cos^3 x$.
5. Divide entre $cos^3 x$.
6. Divide entre dos.
7. Aplica la identidad trigonométrica por cociente para la tangente.
8. Extrae raíz cúbica.
9. Aplica la función arco tangente, para obtener que $x = 0.6708879787$

Paso 3. Obtener la segunda derivada de la función $l(x)$ y evaluarla en $x = 0.6708879787$

$$l''(x) = 4\left(\frac{d\ sec\ x}{dx} \cdot tan\ x + sec\ x \cdot \frac{d\ tan\ x}{dx}\right) - 2\left(\frac{d\ csc\ x}{dx} \cdot cot\ x + csc\ x \cdot \frac{d\ cot\ x}{dx}\right)$$

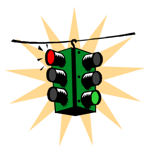
$$= 4\left(sec\ x \cdot tan^2\ x + sec\ x \cdot \frac{d\ tan\ x}{dx}\right) - 2\left(-csc\ x \cdot cot^2\ x + csc\ x \cdot \frac{d\ cot\ x}{dx}\right)$$

De nueva cuenta se está en un punto donde se ha creado la necesidad de buscar nuevos conocimientos, porque ¿cuál será la derivada de la función básica de la tangente y cuál la de la función básica de la cotangente?



Ejercicio 4

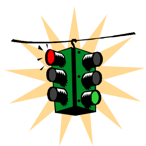
Considerando que $tan\ x = \dfrac{sen\ x}{cos\ x}$ y que $cot\ x = \dfrac{1}{tan\ x}$, demuestra que es válido lo afirmado en los conceptos clave 9 y 10.



Concepto clave:

9. Derivada de la función básica tangente

Si $f(x) = tan\ x$, entonces $f'(x) = sec^2\ x$, o con las otras notaciones; $\dfrac{d\ tan\ x}{dx} = sec^2\ x$ o $D_x(tan\ x) = sec^2\ x$.



Concepto clave:

10. Derivada de la función básica de la cotangente

Si $f(x) = cot\ x$, entonces $f'(x) = -csc^2 x$, o con las otras notaciones; $\dfrac{d\ cot\ x}{dx} = -csc^2 x$ o $D_x(cot\ x) = -csc^2\ x$.

Ejercicio 5

Aplica los resultados de los conceptos clave 9 y 10 para que concretes la segunda derivada de la función $l(x)$, verifiques que es $l''(x)=(4\cdot sec\,x)(tan^2x+sec^2x)+(2\cdot csc\,x)(cot^2x+csc^2x)$ y que $l''(0.6708879787)=25.67388039$

La respuesta al ejercicio 5, permite concluir que la función $l(x)$ tiene mínimo en el intervalo $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Preguntar:

6. ¿En qué se basa la afirmación anterior?

7. ¿Para qué valor de x se obtiene el mínimo de $l(x)$?

8. ¿Cuál es el valor mínimo de la función $l(x)$ en el intervalo dado?

9. ¿Cuál es la longitud mínima de la viga del problema inicial?

10. ¿Para qué medida, en grados, del ángulo de elevación de la viga se logra esa longitud mínima?

Ejercicio 6

Encuentra el mínimo de la función $f(x)=tan\,x+cot\,x$ en el intervalo $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Finalmente, como en la sección anterior, a quien imparte el curso le corresponderá proponer ejercicios, con el propósito de practicar la parte algorítmica, ejemplificando detalladamente la resolución de algunos de ellos, empleando ahora las reglas de derivación para las funciones básicas seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante en conjunción con las reglas algebraicas.