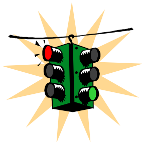
## RELACIÓN ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU SEGUNDA DERIVADA



**Conceptos clave:**

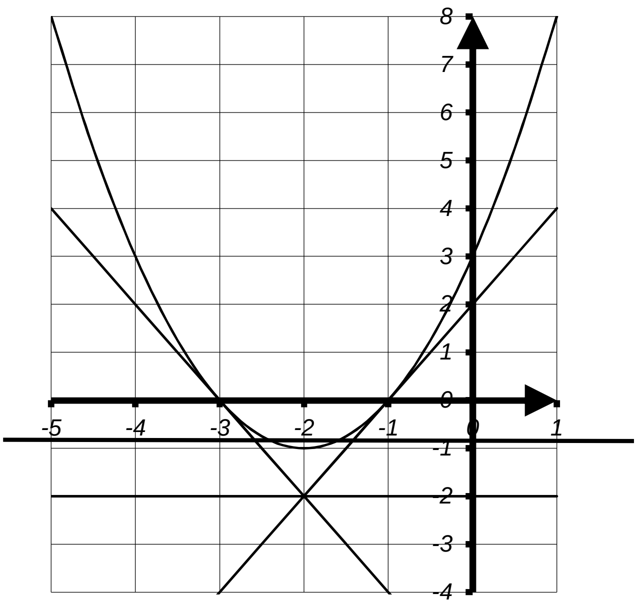
Al hecho de curvarse hacia arriba o hacia abajo una gráfica, le llamaremos **concavidad**.

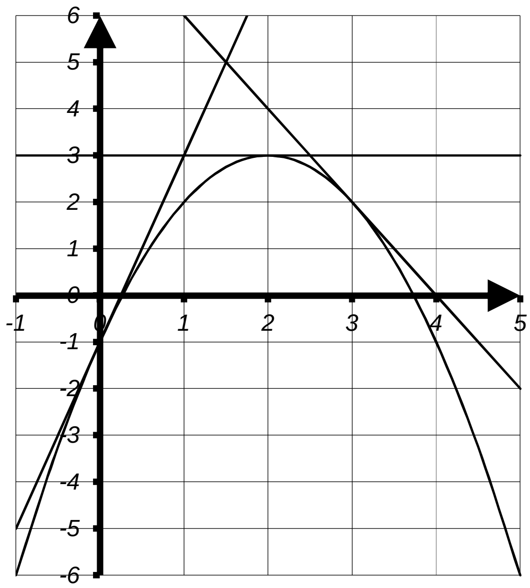
**18. Concavidad hacia arriba**

Donde una función es cóncava hacia **arriba**, sus tangentes están por **debajo** de ella y sus pendientes son **crecientes**.

**19. Concavidad hacia abajo**

Donde una función es cóncava hacia **abajo**, sus tangentes están por **arriba** de ella y sus pendientes **decrecen**.




**20. ¿Cómo determinar el tipo de concavidad de una gráfica?**

Para toda función $f(x)$ cuya segunda derivada existe en el intervalo $(a,b)$:

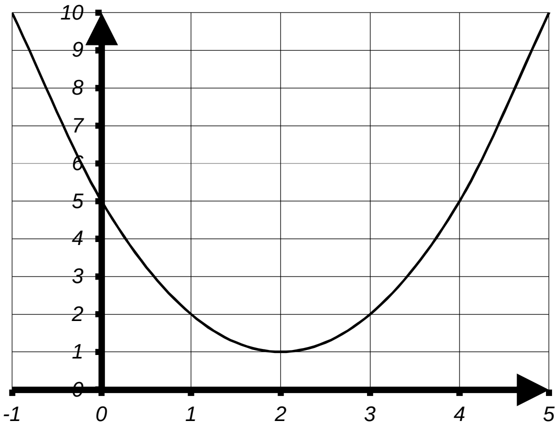
- ✓ Si $f''(x) > 0$ para todo valor $x$ en $(a,b)$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia **arriba** en $(a,b)$.
- ✓ Si $f''(x) < 0$ para todo valor $x$ en $(a,b)$, la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia **abajo** en $(a,b)$.

**Ejemplo 1**

Para cada una de las siguientes funciones encontrar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, hacia abajo, así como las coordenadas de los puntos de inflexión, si existen. Bosquejar la gráfica.

1) $f(x) = x^2 - 4x + 5$

$f'(x) =$ ____________________; $f''(x) = 2 > 0.$




$\therefore$ $f(x)$ es cóncava hacia arriba en todo el eje $X$. No tiene puntos de inflexión puesto que no cambia de concavidad.

2) $f(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$, función que puede escribirse como $f(x) = 3\,(x^2 + 3)^{-1}$, por lo que:

$f'(x) = -3(x^2 + 3)^{-2}(2x) = -6x\,(x^2 + 3)^{-2}$

$f''(x) = -6\,(x^2 + 3)^{-2} - 6x(-2)(x^2+3)^{-3}(2x)$, de donde:

$$f''(x) = \frac{18x^2 - 18}{(x^2+3)^3}.$$

$f(x)$ será cóncava hacia arriba donde $\dfrac{18x^2-18}{(x^2+3)^3} > 0.$

Puesto que $x^2 + 3$ siempre es positivo, para cualquier valor de $x$, necesariamente $18x^2 - 18 > 0$; $18x^2 > 18$; $x^2 > 1$; $x > \sqrt{1}$ de donde $x > 1$ ó $x < -1$.

$\therefore$ $f(x)$ es cóncava hacia arriba en el intervalo $(1, \infty)$ y en $(-\infty, -1)$.

$f(x)$ será cóncava hacia abajo donde $18x^2 - 18 < 0$; $18x^2 < 18$; $x^2 < 1$; $x < \sqrt{1}$ desigualdad que se cumple sólo si: $-1 < x < 1$, es decir, en el intervalo $(-1,1)$.

*f(x)* tiene puntos de inflexión donde $18x^2 - 18 = 0;\ x_1=1,\ x_2= -1.$

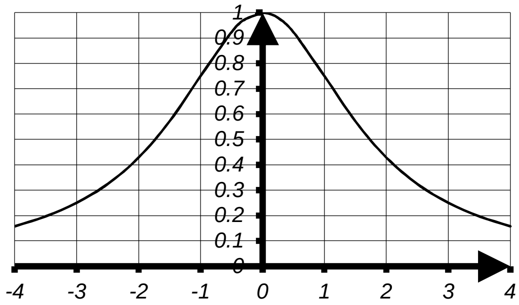
Y las coordenadas de esos puntos son $(1, f(1))$ y $(-1, f(-1))$

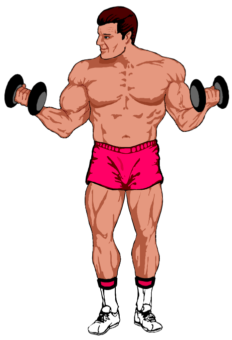
Obtener la ordenada de cada uno de ellos.

$f(1) = 0.75$ y $f(-1) = 0.75$

Los puntos de inflexión están en $I(-1, 0.75)$ e $I(1, 0.75)$.

Verificar estos resultados en la siguiente gráfica:

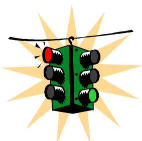


**Ejercicio**

Para cada uno de los siguientes ejercicios, encontrar los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba, hacia abajo, así como las coordenadas de los puntos de inflexión. Bosquejar la gráfica.

1. $f(x) = x^2 - x - 6$
2. $f(x) = 10 - x^2$
3. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
4. $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$
5. $f(x) = 6x^2 - x^4$



**En resumen:**

**21.** a) Una función *f(x)* tiene un **máximo** en un punto $x_1$, sólo si $f''(x_1)$ es **negativa**.

b) Una función *f(x)* tiene un **mínimo** en un punto $x_2$, sólo si $f''(x_2)$ es **positiva**.

c) Una función *f(x)* tiene un punto de **inflexión** en $x_3$, sólo si $f''(x_3)$ vale **cero**.