PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN (2)

Sugerencia para el profesor

Resolver en el pizarrón los siguientes problemas, solicitando la intervención de los alumnos en cada uno de los pasos a seguir.

Ejemplo 1 Problema de la tos

Cuando alguien tose, la tráquea se contrae violentamente, lo que afecta de modo directo a la velocidad del aire expulsado a través de ella. Si la velocidad del aire durante una tosida se puede expresar $v(r) = k\,(R - r)\,r^2$, donde k es una constante positiva que depende de la persona, R es el radio normal de la tráquea y r el radio durante el golpe de tos, ¿qué valor del radio r producirá la máxima velocidad del aire expulsado?

Procedamos a resolverlo:

$v(r) = k\,(R - r)\,r^2, \quad v(r) = k\,(R\,r^2 - r^3)$

1. $\dfrac{dv}{dr} = k(2R\,r - 3r^2)$

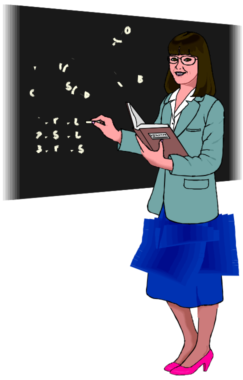
2. $k\,(2R\,r - 3r^2) = 0.$

3. $2R\,r - 3\,r^2 = r(2R - 3r) = 0; \quad r_1 = 0; \;\; 2R - 3r = 0; \quad r_2 = \dfrac{2}{3}R$

4. $\dfrac{d^2v}{dr^2} = k(2R - 6r)$

5. $v''\left(\dfrac{2}{3}R\right) = k\left(2R - 6\left(\dfrac{2}{3}R\right)\right) = k(2R - 4R) = -\,2kR < 0$, porque k y R son positivas.

6. La velocidad del aire expulsado $v(r)$ tiene un máximo cuando $r = \dfrac{2}{3}R$.



Ejemplo 2 Problema del medicamento

La concentración C de un medicamento en la sangre, después de t horas de inyectado en tejido muscular, se expresa como $C(t)=\dfrac{3t}{27+t^3}$. ¿Para qué valor de t la concentración C en la sangre es máxima?

Resolvámoslo:

1. $\dfrac{dC}{dt}=\dfrac{3(27+t^3)-3t(3t^2)}{(27+t^3)^2}=\dfrac{81+3t^3-9t^3}{(27+t^3)^2}=\dfrac{-6t^3+81}{(27+t^3)^2}$

2. $\dfrac{81-6t^3}{(27+t^3)^2}=0$; $t^3=\dfrac{-81}{-6}=\dfrac{27}{2}$; $t=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}$.

3. $t=\sqrt[3]{\dfrac{27}{2}}=2.3811$.

Obtener la segunda derivada resulta un proceso largo, probemos el criterio de la primera derivada.

4. $t = 2.3811$ divide al eje X en dos intervalos: $(-\infty, 2.3811)$ y $(2.3811, \infty)$

Pasos 5 y 6.

Intervalo	$(-\infty, 2.3811)$	$(2.3811, \infty)$
Valor de t	2	3
Valor de $C'(t)$	$\dfrac{33}{1225}=0.0269$	$\dfrac{-81}{2916}=-0.02777$
Signo de $C'(t)$	+	-

2. $\therefore$ $C(t)$ tiene un máximo en $t = 2.3811$ *horas* $= 2$ *h* 22 *min* 51 *seg*

Ejemplo 3 Problema del acero

Una planta productora de acero puede producir x toneladas de acero de segunda clase al día y y toneladas de acero de primera clase al día. La relación entre x y y está dada por la expresión $y = \frac{40-5x}{10-x}$. Si el precio de venta del acero de segunda es la mitad del de primera, ¿qué cantidad de acero de segunda clase le da a esa planta la venta máxima?

venta = (precio de primera) (y) + $\left(\frac{1}{2}\ \textit{precio de primera}\right)(x)$. Sea p el precio de la tonelada de acero de primera.

La función que necesitamos optimizar es: $V(x) = p\frac{40-5x}{10-x} + \frac{1}{2}px$

1. $$\frac{dV}{dx} = \frac{(-5)(10-x)-(40-5x)(-1)}{(10-x)^2}p + \frac{1}{2}p = \frac{-50+5x+40-5x}{(10-x)^2}p + \frac{1}{2}p =$$
$$\frac{-10}{(10-x)^2}p + \frac{1}{2}p = p\left(\frac{-10}{(10-x)^2} + \frac{1}{2}\right)$$

2. $p\left(\frac{-10}{(10-x)^2} + \frac{1}{2}\right) = 0$; $\frac{-10}{(10-x)^2} = -\frac{1}{2}$; $(10-x)^2 = 20$; $100 - 20x + x^2 = 20$;

$x^2 - 20x + 80 = 0$; $x = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(1)(80)}}{2(1)} = \frac{20 \pm \sqrt{80}}{2}$

3. $x_1 = 14.47$, $x_2 = 5.52$

4. $V''(x) = \frac{d}{dx}(p\,(-10\,(10-x)^{-2} + \frac{1}{2}) = p\,(20\,(10-x)^{-3}(-1)) = \frac{-20p}{(10-x)^3}$.

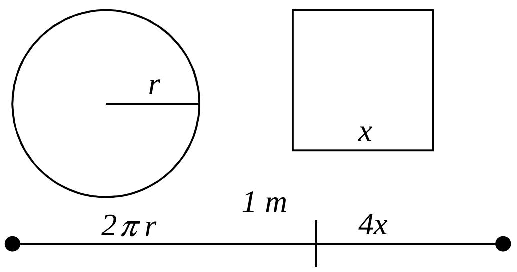
$V''(14.47) = \frac{-20p}{(10-14.47)^3} = 0.2239\ p > 0$, porque p es positivo. Por lo tanto es un mínimo.

$V''(5.52) = \frac{-20p}{(10-5.52)^3} = -\ 0.2224\ p < 0$, porque p es positivo. Por lo tanto es un máximo.

La planta obtiene la máxima ganancia produciendo 5.52 toneladas de acero de segunda clase al día.

Ejemplo 4 Problema de la varilla

Se tiene una varilla de un metro de longitud para hacer un círculo y un cuadrado. ¿Cómo debe cortarse la varilla para que la suma de las áreas de las figuras construidas sea máxima? ¿Y para que sea mínima?



Llamemos r al radio del círculo y x al lado del cuadrado.

La suma de los perímetros:

$2\pi r + 4x = 1\,m$ ……..(1)

El área del círculo será $A = \pi r^2$

El área del cuadrado será $A = x^2$

La función que queremos optimizar es $A = A_{círculo} + A_{cuadrado}$

$A = \pi r^2 + x^2$ ……. (2)

Con el propósito de que A dependa sólo de una variable, por ejemplo r, despejaremos x en (1) y la sustituiremos en (2).

De *(1)*: $x = \dfrac{1-2\pi r}{4}$, así que ahora $A(r) = \pi r^2 + \left(\dfrac{1-2\pi r}{4}\right)^2$

Procedemos a resolverlo:

1. $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi r + 2\left(\dfrac{1-2\pi}{4}\right)\left(\dfrac{-2\pi}{4}\right) = 2\pi r + \dfrac{-4\pi + 8\pi^2 r}{16} = 2\pi r - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi^2 r}{2}$

2. $2\pi r - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi^2}{2} r = 0$; $2r - \dfrac{1}{4} + \dfrac{\pi r}{2} = 0$; $8r - 1 + 2\pi r = 0$; $r\,(8 + 2\pi) = 1$;

3. $r = \dfrac{1}{8+2\pi}$

4. $\dfrac{d^2A}{dr^2} = 2\pi + \dfrac{\pi^2}{2} = 16.1527 > 0$, constante positiva.

5. $\therefore A(r)$ tiene un mínimo absoluto en $r = \dfrac{1}{8+2\pi}$, es decir, un círculo de radio $r = \dfrac{1}{8+2\pi}$ *m* y un cuadrado de lado $x = \dfrac{1-2\pi r}{4}$ = *0.14 m* producen el área mínima.

6. $A_{círculo} = \pi\left(\dfrac{1}{8+2\pi}\right)^2 = 0.015399\ m^2;\ A_{cuadrado} = \dfrac{1}{16}\left(1-\dfrac{2\pi}{8+2\pi}\right)^2 = 0.019606$

La función *A(r)* es cóncava hacia arriba en todo su dominio, tiene un mínimo absoluto, sin embargo en los valores extremos permitidos para r, *A(r)* tiene máximos relativos, el mayor de ellos, si lo hay, será el máximo relativo de la función en ese intervalo.

¿Cuál es el menor valor que puede tomar r? $r = 0$

El mayor valor que puede tomar r es $r = \dfrac{1}{2\pi}$, ¿por qué?

Porque $2\pi r = 1\ m$

De manera que $0 \le r \le \dfrac{1}{2\pi}$

Evaluamos *A(r)* en cada extremo del intervalo y tomamos el mayor, si lo hay.

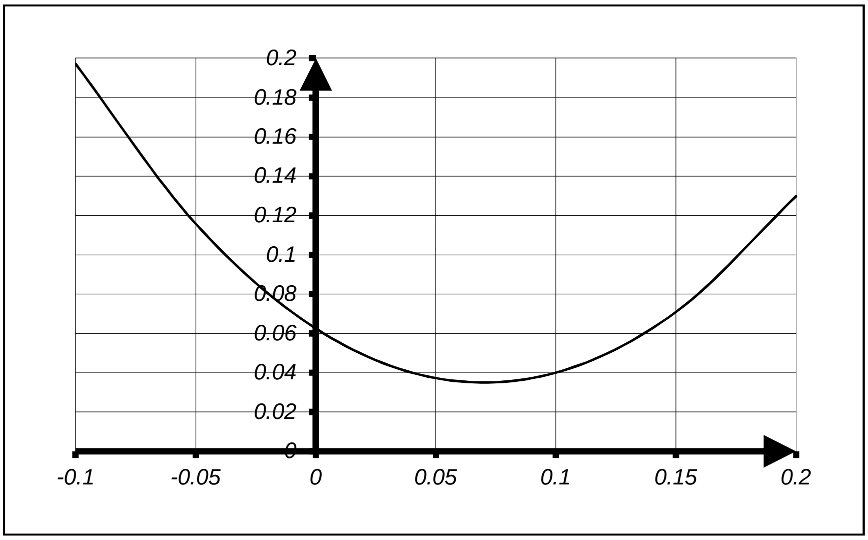
$$A(0) = \pi(0^2) + \frac{1}{16}(1 - 2\pi(0)) = \frac{1}{16} = 0.0625\ m^2$$

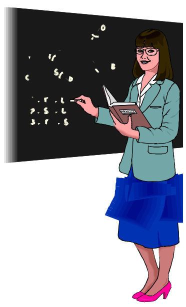
$$A\left(\frac{1}{2\pi}\right) = \pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 + \frac{1}{16}\left[1-2\pi\left(\frac{1}{2\pi}\right)\right]^2 = \frac{1}{4\pi} = 0.0795\ m^2$$

Para este valor del radio, el lado del cuadrado es cero.

El valor máximo de *A(r)* sucede cuando $r = \dfrac{1}{2\pi}$, por lo tanto no hay que cortar la varilla, sólo doblarla para formar el círculo.

Esta gráfica corresponde a la función con que hemos trabajado:





Ejemplo 5 Problema del costo

Un economista determinó que el costo de producir x artículos diarios, para cierta empresa, es $C(x) = 100 + \frac{10}{x} + \frac{x^2}{200}$.

¿Cuántos artículos diarios deben producirse para que el costo de producción sea mínimo?

A la derivada del costo se le llama costo marginal.

1. $C'(x) = -10x^{-2} + \frac{2x}{200} = -\frac{10}{x^2} + \frac{x}{100}$.

2. $-\frac{10}{x^2} + \frac{x}{100} = 0$

3. $\frac{x}{100} = \frac{10}{x^2}$; $x^3 = 1000$; $x = \sqrt[3]{1000}$; $x_1 = 10$.

4. $\frac{d^2C}{dx^2} = 20x^{-3} + \frac{1}{100} = \frac{20}{x^3} + \frac{1}{100}$

5. $C''(10) = \frac{20}{10^3} + \frac{1}{100} = \frac{20+10}{1000} = \frac{30}{1000} > 0$

$C(x)$ tiene un mínimo cuando $x = 10$.

$$C(10) = 100 + \frac{10}{10} + \frac{100}{200} = 101.5$$ artículos.

La empresa debe producir 101.5 artículos diarios para minimizar el costo de producción.

Ejercicio

El estudiante resolverá los siguientes problemas de optimización.

1. Un granjero necesita cercar una zona junto al río. Si dispone de $1000\ m$ de malla ciclónica, ¿qué dimensiones debe darle a la zona cercada para que su área sea máxima? El lado que queda junto al río no requiere malla.

2. Determina el radio y la altura del cilindro de volumen máximo que puede inscribirse en una esfera de $5\ cm$ de radio. Calcula también el volumen máximo.

3. Una compañía de televisión por cable sabe que obtiene una ganancia de $\$15$ por cada cliente, si tiene 1000 clientes o menos en cada sección. Si hay más de 1000 clientes, la ganancia disminuye un centavo por cada cliente que pasa de 1000. ¿Cuántos clientes por sección le producen la máxima ganancia?