PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN (1)

Sugerencia para el profesor

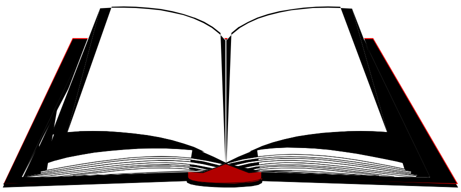
Hacer énfasis ante los estudiantes acerca de la siguiente importante aplicación del Cálculo Diferencial, pues la resolución de problemas de optimización es una de las formas en que más se utiliza el Cálculo en otras áreas del conocimiento.

Lo que haremos ahora constituye una de las principales aplicaciones del Cálculo Diferencial, utilizado en muy diversas áreas del conocimiento.

Con frecuencia en los procesos industriales, científicos y tecnológicos se busca optimizar las condiciones en que se llevan a cabo, así como los resultados que se obtienen.

Por ejemplo, se pretende envasar el mayor volumen de un producto empleando la menor cantidad posible de material, obtener el mejor efecto de un medicamento con la menor dosis administrada, encontrar el número de artículos que deben venderse para obtener la máxima ganancia, etc.

Eso es optimizar un proceso y el Cálculo es una herramienta muy útil para lograrlo.



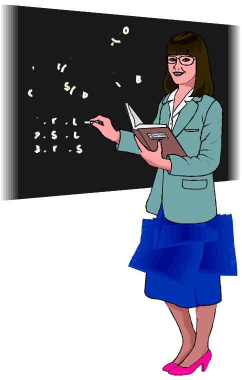
P R O C E D I M I E N T O

Para resolver un problema de optimización, básicamente se debe proceder de esta manera:

1. A partir del enunciado del problema, obtener la función que queremos optimizar, de modo que dependa de una sola variable.
2. Aplicar uno de los criterios para encontrar los valores extremos de una función.
3. Interpretar los resultados con base en la naturaleza del problema planteado.

Sugerencia para el profesor

Empezar planteando cuatro problemas que se resolverán contando con la ayuda de preguntas y afirmaciones incompletas que se deberán completar.



Ejemplo 1 Problema del rectángulo inscrito

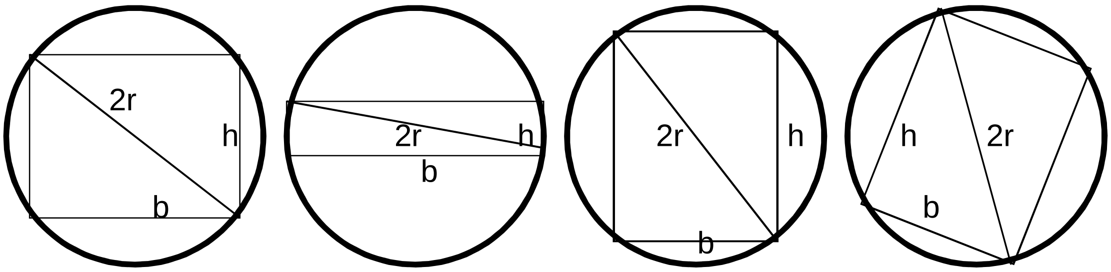
¿Qué dimensiones debe tener un rectángulo inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio, para que su área sea la máxima posible?

Hacer algunas precisiones:

1. En una circunferencia de 5 cm de radio pueden inscribirse una infinidad de rectángulos diferentes.

2. El área de un rectángulo se calcula $A = b\,h$

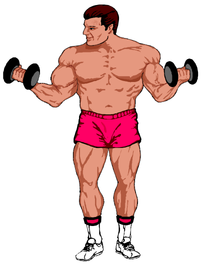
3. Según la posición en que se ubica el rectángulo inscrito, varían sus dimensiones base y altura y por lo tanto varía su área.



4. En todos los casos:

a) La diagonal del rectángulo mide 10 cm, que es el diámetro de la circunferencia.

b) Por el teorema de Pitágoras: $h^2 + b^2 = 10^2$; de donde: $h = \sqrt{100 - b^2}$



Ejercicio

Completar la siguiente tabla para verificar que en efecto, diferentes valores de b y h producen rectángulos inscritos de áreas diferentes.

b en cm	$h = \sqrt{100-b^2}$ en cm	$A = b \bullet h$ en cm^2
0	10	
1	$\sqrt{99} =$	9.94
2		
3		
4		
5		
6	8	48
7	7.14	49.98
8	6	48
9		
10	0	0

¿Por qué $0 \leq b \leq 10$?

Observando los valores de la tabla anterior, no es difícil concluir que si b toma valores entre 6 y 8 cm, el área alcanza los valores más altos.

Podríamos tratar de afinar cada vez más la aproximación al valor máximo del área, variando los valores de b de 0.1 en 0.1 en el intervalo $[6,8]$, localizar un nuevo intervalo donde quede "atrapado" el máximo y seguir mejorando la aproximación.

Sin embargo, ahora se tienen conocimientos de Cálculo suficientes para resolver el problema con toda precisión.

Obtengamos una expresión que nos dé el área del rectángulo inscrito, como función de la base y la altura:

$A = bh$, pero encontramos que la altura del rectángulo depende de la base y del diámetro de la circunferencia: $h = \sqrt{100 - b^2}$ con lo que:

$A(b) = b\sqrt{100 - b^2}$, función a la que podemos aplicarle uno de los procedimientos que conocemos para calcular máximos y mínimos.

Sugerencia para el profesor

Hacer las operaciones necesarias para que el alumno siga el desarrollo muy de cerca.

1. $\frac{dA}{db} = 1\sqrt{100 - b^2} + b(\frac{1}{2})(100 - b^2)^{-\frac{1}{2}}(-2b) =$

$\sqrt{100 - b^2} - \frac{b^2}{\sqrt{100 - b^2}} = \frac{100 - b^2 - b^2}{\sqrt{100 - b^2}} = \frac{100 - 2b^2}{\sqrt{100 - b^2}}$

finalmente: $A'(b) = \frac{100 - 2b^2}{\sqrt{100 - b^2}}$

2. $A'(b)=0;$

3. $\frac{100 - 2b^2}{\sqrt{100 - b^2}} = 0$; de donde $100 - 2b^2 = 0$, $2b^2 = 100$, $b^2 = 50$, $b = \sqrt{50} = 7.071$

Usando el criterio de la segunda derivada:

4. $A''(b) = \frac{-4b\sqrt{100 - b^2} - (100 - 2b^2)(\frac{1}{2})(100 - b^2)^{-\frac{1}{2}}(-2b)}{100 - b^2} =$

$= \frac{-4b\sqrt{100 - b^2} + \frac{100b - 2b^3}{\sqrt{100 - b^2}}}{100 - b^2} = \frac{\frac{-4b(100 - b^2) + 100b - 2b^3}{\sqrt{100 - b^2}}}{100 - b^2} = \frac{-400b + 4b^3 + 100b - 2b^3}{\sqrt{(100 - b^2)^3}}$

$= \frac{2b^3 - 300b}{\sqrt{(100 - b^2)^3}} = \frac{2b\,(b^2 - 150)}{\sqrt{(100 - b^2)^3}}$

5. $A''(\sqrt{50}) = \dfrac{2\sqrt{50}\ (50-150)}{\sqrt{(100-50)^3}}$ = *- 4 < 0*

$\therefore$ *A(b)* tiene un máximo en $b = \sqrt{50}$, es decir, el rectángulo de área máxima mide $\sqrt{50}$ cm de base. Su altura es $h = \sqrt{100-50} = \sqrt{50}$, ¡se trata de un cuadrado!

6. El área máxima es $A = bh = \sqrt{50}\sqrt{50} = 50\ \text{cm}^2$.

La gráfica de la función $A(b) = b\sqrt{100-b^2}$ es la siguiente:

Sugerencia para el profesor

Es el momento de comparar la utilidad de cada uno de los procedimientos aprendidos para encontrar valores extremos, veamos qué habríamos tenido que hacer, si a partir del paso número 4 aplicamos el criterio de la primera derivada.

4. El valor $b = \sqrt{50}$ divide al eje X en dos intervalos: $\left(-\infty, \sqrt{50}\right)$ y $\left(\sqrt{50}, \infty\right)$.

Pasos 5 y 6.

Intervalo	$\left(-\infty, \sqrt{50}\right)$	$\left(\sqrt{50}, \infty\right)$
Valor de *b*	7	8
Valor de *A'(b)*	+0.28	-4.6666
Signo de *A'(b)*	+	-

7. $\therefore$ *A(b)* tiene un máximo en $b = \sqrt{50}$, etcétera, el resto del procedimiento es el mismo.

Como era de esperarse, se obtiene el mismo resultado con cualquiera de los criterios, al estudiante le corresponderá decidir cuándo usar uno y cuándo el otro. Tal vez le parezca que en el caso que acabamos de analizar, obtener la segunda derivada resultó un poco complicado y es preferible el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 2 Problema de los números

Encontrar dos números reales que sumen 20 y su producto sea máximo.

Dar unos segundos para que los alumnos resuelvan el problema "por tanteo".

Ahora hagámoslo formalmente, para practicar la rutina con un caso sencillo.

Llamemos x a uno de los números, el otro se podrá expresar como $y = 20 - x$

Representemos el producto como $P = x\ y$, pero sólo podemos trabajar funciones que dependen de una variable, por lo que sustituimos y y tenemos

$P(x) = x\,(20 - x) = 20x - x^2$

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

1. $P'(x) = 20 - 2x$; 2. $20 - 2x = 0$; 3. $x_1 = 10$

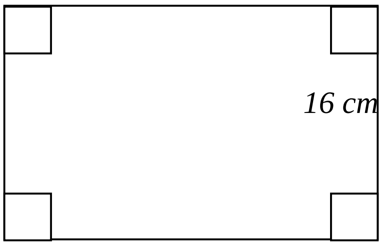
4. $P''(x) = -2 < 0 \;\therefore P(x)$ tiene un máximo absoluto.

5. $P''(10) = -2 < 0$; 6. Los números buscados son $x = 10$ y $y = 10$

Ejemplo 3 Problema de la caja

Se necesita construir una caja sin tapa, a partir de una lámina rectangular que mide $21\ cm$ de largo y $16\ cm$ de ancho. Se debe construir la caja cortando cuadrados iguales en las 4 esquinas de la lámina, doblando hacia arriba los lados y soldando.

Encontrar la medida del lado de los cuadrados que deben cortarse, para obtener la caja de volumen máximo.



Llamemos x al lado de los cuadrados.

El volumen de la caja resultante se obtiene

$V = (A_{base})(altura)$

La base será un rectángulo que medirá de largo $21 – 2x$, ¿por qué?

El ancho de la base de la caja será $16 – 2x$. Por lo tanto el área de la base $A_b = (21 – 2x)(16 – 2x)$.

La altura de la caja será x cm.

Ahora podemos expresar su volumen $V(x) = (21 – 2x)(16 – 2x)\,x$;

$V(x) = 4x^3 – 74x^2 + 336x$

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

1. $V'(x) = 12x^2 – 148x + 336$
2. $12x^2 – 148x + 336 = 0$
3. $3x^2 – 37x + 84 = 0$; $\quad x = \dfrac{37 \pm \sqrt{(-37)^2 - 4(3)(84)}}{2(3)} = \dfrac{37 \pm \sqrt{361}}{6} = \dfrac{37 \pm 19}{6}$

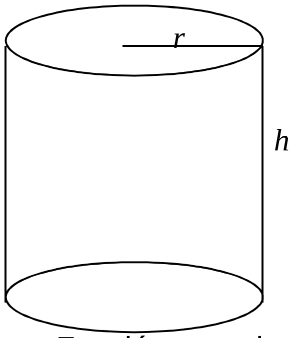
$X_1 = 9.33333$, $\quad X_2 = 3$. Dadas las condiciones del problema, desechamos X_1

4. $V''(x) = 24x - 148$.
5. $V''(3) = 24(3) – 148 = -76 < 0$.

$V_{máx} = (21 – 2(3))(16 – 2(3))(3) = 450 \text{ cm}^3$

Ejemplo 4 Problema de la lata

Un fabricante de aceite para motor desea construir latas cilíndricas con capacidad de un litro, ¿qué altura y qué radio deben tener las latas para que el material con que se construyan sea mínimo?



El volumen de la lata se obtiene $V = A_b\, h$

$V = \pi r^2 h = 1000\ cm^3$, ¿por qué?

El área de la lata, que debemos optimizar es

$A_T = A_L + 2\, A_b$; donde A_L es el área lateral del cilindro, que se calcula $A_L = 2\,\pi\, r\, h$.

$A_T = 2\pi r\, h + 2\pi r^2$

Función que depende de dos variables: r y h , pero del volumen podemos despejar h: $h = \dfrac{1000}{\pi\, r^2}$, de manera que sustituyéndola tenemos

$A(r) = 2\pi r \dfrac{1000}{r^2} + 2\pi r^2$, que al simplificar se reduce a

$A(r) = \dfrac{2000\,\pi}{r} + 2\,\pi r^2$;

1. $A'(r) = -\,2000\,\pi\, r^{-2} + 4\pi\, r;$

2. $\dfrac{-2000}{r^2} + 4\pi r = 0$; $\quad r^3 = \dfrac{2000}{4\,\pi} = \dfrac{500}{\pi}$

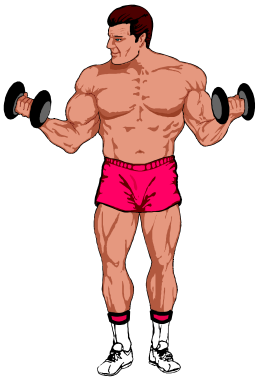
3. $r = \sqrt[3]{\dfrac{500}{\pi}} = 5.419260701$

4. $A''(r) = 4000\,\pi r^{-3} + 4\pi = \dfrac{4000}{r^3} + 4\pi$

5. $A''(5.41926) = 37.699 > 0;\quad \therefore A(r)$ tiene un mínimo absoluto.

6. La lata de un litro que requiere la mínima cantidad de material, es un cilindro de radio $r = 5.419260701$ y $h = \dfrac{1000}{\pi r^2} = 10.8385214.$

$V_{máx} = 1000\ cm^3$, $A_{min} = 2\pi(5.41926)\,(10.8385) + 2\pi(5.41926) = 553.58\ cm^2$



Ejercicio

Resolver los siguientes problemas de optimización.

1. Encontrar dos números reales cuya diferencia sea 10 y su producto sea mínimo.

2. Obtener dos números reales positivos, que sumen 50 y su producto sea máximo.

3. Encontrar dos números positivos cuyo producto sea 100 y que su suma sea mínima.

4. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima, cuyo perímetro es $400\ m$? Encontrar también el área máxima.

5. A partir de una hoja cuadrada de cartón, que mide $20\ cm$ por lado, debe construirse una caja, sin tapa, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando los lados. ¿De qué dimensiones deben ser los cuadrados que se corten, para que el volumen de la caja sea máximo? Encontrar también ese volumen.