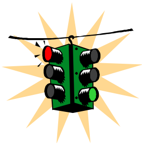
FUNCIÓN CRECIENTE, DECRECIENTE O CONSTANTE

Conceptos clave:



Para toda función $f(x)$, derivable en un intervalo (a,b):

5. Si $f'(x) > 0$ para todo valor x en (a,b), $f(x)$ es **creciente** en (a,b).

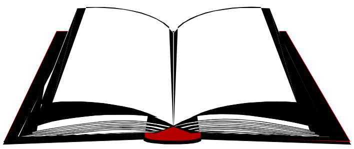
6. Si $f'(x) < 0$ para todo valor x en (a,b), $f(x)$ es **decreciente** en (a,b).

7. Si $f'(x) = 0$ para todo valor x en (a,b), $f(x)$ es **constante** en (a,b). Este caso nos será particularmente útil en el caso en que el intervalo conste de un solo punto $[a,a]$.

8. A cada valor de x en el que $f'(x) = 0$, se le llama **punto crítico**.

¿Cómo saber, a partir de la derivada $f'(x)$, si la primitiva $f(x)$ es creciente, decreciente o constante?

P R O C E D I M I E N T O



El profesor presentará el procedimiento que contesta esta pregunta.

1. Se encuentran los valores de x donde $f'(x)$ vale cero, resolviendo la ecuación $f'(x) = 0$.

2. Los n valores de x obtenidos al resolver la ecuación anterior nos permiten dividir el eje X en $n+1$ intervalos ajenos.

3. Se construye una tabla en la que damos a x valores en cada intervalo y, analizando el signo que toma $f'(x)$ en cada uno de ellos, podemos decidir si $f(x)$ es creciente o decreciente, con base en el criterio al que arribamos antes.

Apliquemos este procedimiento a la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x$;

Igualándola a cero para obtener los puntos críticos $3x^2 - 6x = 0$;

Resolviendo la ecuación por factorización $3x(x - 2) = 0$;

$$si\ 3x = 0,\ x_1 = 0; \quad si\ x - 2 = 0,\ x_2 = 2.$$

Aplicando los criterios dados:

$f(x)$ es constante en $x_1 = 0$ y en $x_2 = 2.$

Los valores 0 y 2 dividen al eje X en 3 intervalos: $(-\infty,0)$, $(0,2)$ y $(2,\infty)$.

La tabla que puede construirse sería:

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Valor de x en el intervalo	-1	1	3
Valor de $f'(x)$ en el intervalo	9	-3	9
Signo de $f'(x)$	+	-	+
Carácter de $f(x)$ en el intervalo	creciente	decreciente	creciente

Por lo tanto: la función primitiva $f(x)$ es creciente en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(2,\infty)$, y es decreciente en el intervalo $(0,2)$.

Es conveniente comparar los resultados encontrados en la tabla con los obtenidos a partir de la gráfica.

Ejemplo 1

Encontrar los intervalos donde la función

$f(x) = x^2 - 6x + 5$ es creciente, decreciente y los puntos donde es constante.

$f'(x)$ = ____________________; $2x - 6 = 0$, cuya solución es:.

$x_1 = 3$ Por lo tanto $f(x)$ es constante en $x_1 = 3.$

Este valor de x divide al eje X en los intervalos $(-\infty,3)$ y $(3,\infty)$, que no comparten ningún punto.

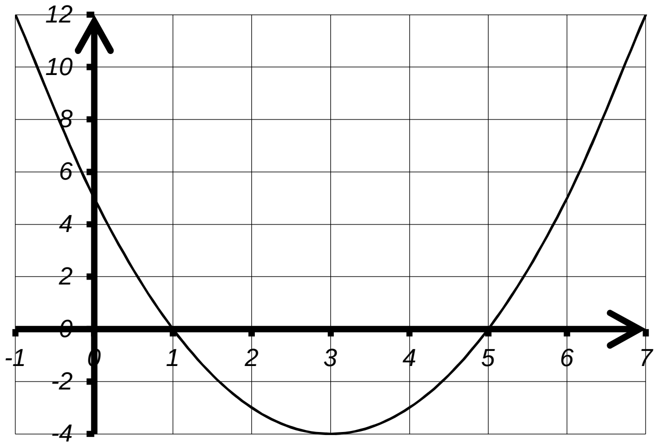
El estudiante completará la tabla:

Intervalo	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
Valor de x en el intervalo	2	4
Valor de $f'(x)$ en el intervalo		
Signo de $f'(x)$	-	

Carácter de $f(x)$ en el intervalo		creciente

De donde $f(x)$ es decreciente en el intervalo (______, ______) y creciente en (_____, _____).

Verificar estos resultados en la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$, que se muestra a continuación.



Ejemplo 2

Encontrar los intervalos donde la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ es creciente, decreciente, así como los puntos donde es constante. Observar que esta función no está definida en $x = 0$.

$f'(x) =$ __________________; $\quad 1 - \frac{1}{x^2} = 0$;

Resolviendo esta ecuación: $1 = \frac{1}{x^2}$; $x^2 = 1$, cuyas soluciones son: $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Valores que dividen al eje X en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1,1)$ y $(1, \infty)$.

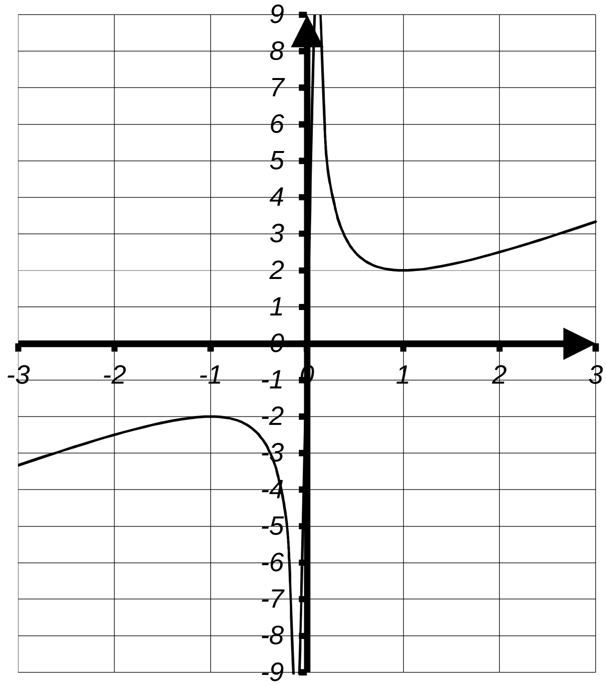
Hacer notar que, como la función no está definida en $x = 0$, no podemos usar el intervalo (-1,1). Nos vemos en la necesidad de dividir al eje X en los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$.

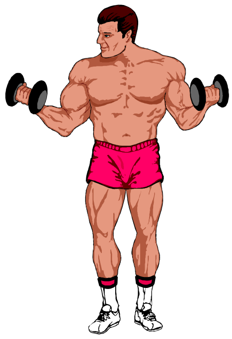
El estudiante completará la tabla:

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Valor de x en el intervalo		$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
Valor de $f'(x)$ en el intervalo		-3	-3	
Signo de $f'(x)$	+	-		
Carácter de $f(x)$ en el intervalo	creciente	decreciente		

Llegar a la conclusión: $f(x)$ es creciente en los intervalos (1, ∞) y en (-∞, -1), decreciente en los intervalos $(-1,0)$ y en $(0, 1)$ y constante en $x = -1$ y en $x = 1$ y constante en $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$.

Observar la gráfica para verificar los resultados





Ejercicio

Encontrar las regiones donde cada una de las siguientes funciones es creciente, decreciente o constante. Utilizar esta información para bosquejar sus gráficas.

1. $f(x) = 5x - 2$
2. $f(x) = x^2 - 8x$
3. $f(x) = 6x - x^2$
4. $f(x) = x^3 - 1$