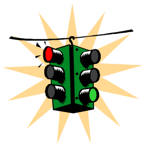
CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN



Conceptos clave:

22. Criterio de la **segunda derivada** para determinar valores extremos de una función:

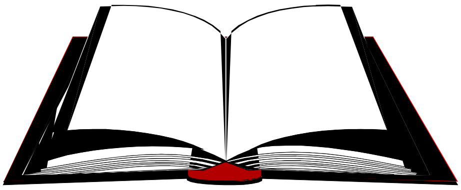
Hipótesis. Si $f(x)$ es una función que tiene primera y segunda derivada en un intervalo (a,b) y tiene un punto crítico en $x = x_1$.

Tesis. El punto crítico $(x_1, f(x_1))$ puede clasificarse de acuerdo con el siguiente criterio:

- Si $f''(x_1) > 0$, $f(x)$ tendrá un mínimo en x_1, porque es cóncava hacia arriba.
- Si $f''(x_1) < 0$, $f(x)$ tendrá un máximo en x_1, porque es cóncava hacia abajo.
- Si $f''(x_1) = 0$, $f(x)$ podría tener un punto de inflexión en x_1, si está cambiando de concavidad.

Sugerencia para el profesor

Conducir a los estudiantes a la conclusión de que el criterio anterior puede convertirse en un nuevo procedimiento para encontrar valores extremos de una función.



P R O C E D I M I E N T O

1. Obtener $\frac{df}{dx}$.

2. Igualar a cero la primera derivada, $f'(x) = 0$, para investigar el carácter creciente, decreciente o constante de $f(x)$.

3. Resolver la ecuación obtenida, para encontrar los puntos críticos x_i, donde $f(x)$ podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

4. Obtener $\frac{d^2 f}{dx^2}$, para investigar el tipo de concavidad que tiene $f(x)$ en cada punto crítico.

5. Sustituir uno a uno los puntos críticos en $f''(x)$ y aplicar el criterio de la segunda derivada.

6. Calcular las coordenadas del valor extremo (máximo o mínimo) o punto de inflexión, sustituyendo cada x_i en $f(x)$: $(x_1, f(x_i))$.

Ejemplos

I. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x$.
2. $3x^2 - 6x = 0$.
3. $3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2) = 0$, de donde

   $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$
4. $f''(x) = 6x - 6$

5. $f''(0) = -6 < 0$. $\therefore f(x)$ tiene un máximo local.
6. Las coordenadas de ese máximo son $(0, f(0))$, es decir $(0, 3)$.
5. $f''(2) = 6 > 0$. $\therefore f(x)$ tiene un mínimo local.
6. Las coordenadas de ese mínimo son $(2, f(2))$, es decir $(2, -1)$.

Que corresponden exactamente a los valores que hemos encontrado en etapas anteriores de esta unidad.

II. $f(x) = (x - 4)^3 + 10$

1. $f'(x) = 3(x - 4)^2$.
2. $3(x - 4)^2 = 0$.
3. $3(x^2 - 8x + 16) = 0$, de donde $x_1 = 4$.
4. $f''(x) = 6(x - 4)$.
5. $f''(4) = 0$. $\therefore$ $f(x)$ tiene un punto de inflexión, con coordenadas:
6. $(4, f(4))$, es decir $(4, 10)$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1. $f'(x) = 2x - 4$
2. $2x - 4 = 0$.
3. De donde $X_1 = 2$.
1. $f''(x) = 2$.
2. $f''(x) > 0$ en todo el dominio de $f(x)$, $\therefore$ $f(x)$ tiene un mínimo absoluto con coordenadas:
3. $(2, f(2))$, es decir $(2, 1)$.

IV. $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$
2. $1 - \frac{1}{x^2} = 0$
3. $1 - \frac{1}{x^2} = 0$, $1 = \frac{1}{x}$, $x^2 = 1$, $x = \pm\sqrt{1}$; $X_1 = 1, X_2 = -1$.
4. $f''(x) = \frac{2}{x^3}$
5. $f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0$. $\therefore$ $f(x)$ tiene un mínimo local.
6. Con coordenadas $(1, f(1))$, es decir $(1, 2)$.
5. $f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0$. $\therefore$ $f(x)$ tiene un máximo local.
6. Con coordenadas $(-1, f(-1))$, es decir $(-1, -2)$.

V. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+3}$.

1. $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+3)^2}$

2. $\dfrac{-6x}{(x^2+3)^2} = 0$.

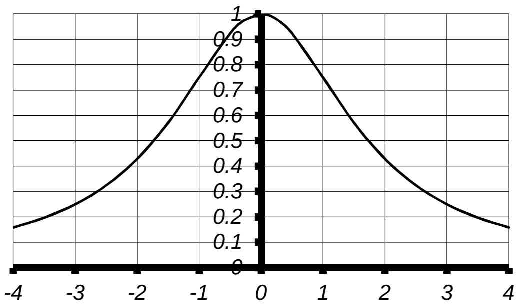
3. Puesto que $(x^2+3)^2$ siempre será mayor que cero, la única posibilidad de que $\dfrac{-6x}{(x^2+3)^2} = 0$ es que $-6x = 0$, de donde: $X_1 = 0$.

4. $f''(x) = \dfrac{18x^2-18}{(x^2+3)^3}$

5. $f''(0) = \dfrac{18(0)-18}{(0^2+3)^3} = -\dfrac{2}{3} < 0$. $\therefore f(x)$ tiene un máximo absoluto.

6. Con coordenadas $(0, f(0))$, es decir $(0, 1)$.

Observa nuevamente la gráfica:



VI. $f(x) = -3x^5 + 5x^3 + 1$

1. $f'(x) = -15x^4 + 15x^2$

2. $-15x^4 + 15x^2 = 0$

3. $-15x^2(x^2-1) = 0, X_1 = 0, X_2 = 1$ y $X_3 = -1$.

4. $f''(x) = -60x^3 + 30x$

5. $f''(0) = 0$ $\therefore f(x)$ tiene un punto de inflexión.

6. Con coordenadas $(0, f(0))$, es decir $(0, 1)$.

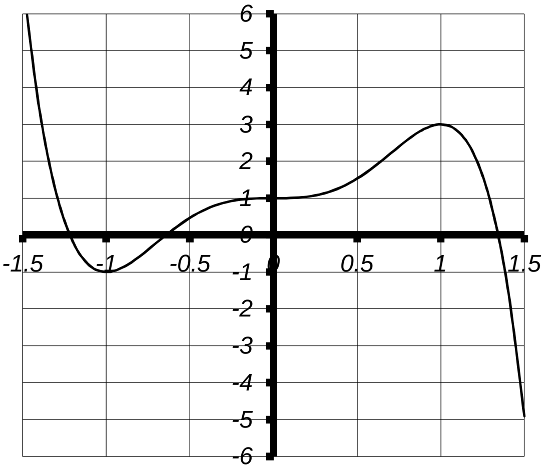
5. $f''(1) = -30 < 0$. $\therefore f(x)$ tiene un máximo.

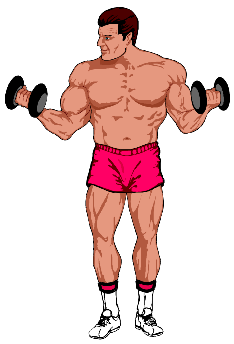
6. Con coordenadas $(1, f(1))$, es decir $(1, 3)$.

5. $f''(-1) = 30 > 0$. $\therefore f(x)$ tiene un mínimo.

6. Con coordenadas *(-1, f(-1)),* es decir *(-1, -1).*

Observa nuevamente la gráfica:





Ejercicio

Aplicando el criterio de la segunda derivada, encontrar los valores extremos y puntos de inflexión de cada una de estas funciones.

1. $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$
2. $f(x) = x^2 - 8x$
3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

6. $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$;

7. $f(x) = x^4 - \frac{8x^3}{3}$;

8. $f(x) = \sqrt[3]{x}(8 - x)$;

9. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 8$;

10. $f(x) = x^2 + \frac{250}{x}$;

11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$.