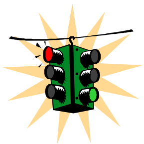
CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA CALCULAR VALORES EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN



Conceptos clave:

17. Criterio de la **primera derivada** para determinar valores extremos de una función:

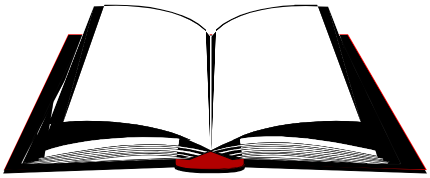
Hipótesis. Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo (a,b), x_1 es el único punto crítico en ese intervalo y $f(x)$ es derivable en (a,b), entonces:

Tesis. El punto crítico $(x_1, f(x_1))$ se puede clasificar de acuerdo con la siguiente tabla:

Signo de $f'(x)$ en (a, x_1)	Signo de $f'(x)$ en (x_1, b)	Decisión
+	-	$f(x_1)$ es un máximo
-	+	$f(x_1)$ es un mínimo
+	+	$f(x_1)$ es un posible punto de inflexión
-	-	$f(x_1)$ es un posible punto de inflexión

Sugerencia para el profesor

Comentar con los estudiantes que es posible convertir el criterio anterior en una serie de pasos a seguir, de manera que podamos establecer el siguiente procedimiento para encontrar valores extremos de una función.



P R O C E D I M I E N T O

1. Obtener la primera derivada de la función.

2. Igualar a cero la primera derivada $f'(x) = 0$, para investigar dónde $f(x)$ es constante.

3. Resolver la ecuación resultante, para encontrar los puntos críticos de $f(x)$: $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ donde podría tener un máximo, un mínimo o un punto de inflexión.

4. Dividir el eje X en intervalos, como lo hicimos antes para analizar el carácter creciente, decreciente o constante de una función.

5. Dar valores a x en cada uno de los intervalos.

6. Evaluar la primera derivada en cada uno de esos valores.

7. Observar los cambios de signo que sufre $f'(x)$ de un intervalo al siguiente y tomar una decisión con base en el criterio anterior.

8. Calcular el valor extremo o punto de inflexión, evaluando $f(x)$ en cada punto crítico.

Ejemplos

Completar lo que se pide en cada ejemplo:

I. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$

1. $f'(x) =$ _____________.
2. $3x^2 - 6x = 0$.
3. $3x^2 - 6x = 3x$ (____ - _____) $= 0$, de donde $x_1 =$ _______ y $x_2 =$ ______.
4. Los valores 0 y 2 dividen al eje X en los intervalos ajenos $(-\infty,0)$, $(0,2)$ y $(2,\infty)$.

5 y 6. Para dar valores a x en cada uno de esos intervalos, podemos hacer una tabla como ésta:

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
Valor de x	-1	1	3
Valor de $f'(x)$	9	-3	9
Signo de $f'(x)$	+	-	+

7. De acuerdo con el criterio de la primera derivada:

a) En $x_1 = 0$, $f(x)$ tiene un máximo, porque $f'(x)$ cambió de positiva a negativa.

b) En $x_2 = 2$, $f(x)$ tiene un mínimo, porque $f'(x)$ cambió de negativa a positiva.

8. El valor máximo de $f(x)$, en $x_1 = 0$ es $f(0) = 0^3 - 3(0^2) + 3 = 3$.

El valor mínimo de $f(x)$, en $x_2 = 2$ es $f(2) = 2^3 - 3(2^2) + 3 = -1$.

II. $f(x)= (x - 4)^3$

1. $f'(x) =$ ___________________.
2. $3(x - 4)^2 = 0$.
3. $3(x^2 - 8x + 16) = 0$, de donde $x_1 =$ _____.
4. El valor 4 divide al eje X en dos intervalos ajenos: $(-\infty,4)$ y $(4,\infty)$.

5 y 6.

Intervalo	$(-\infty,4)$	$(4,\infty)$
Valor de x	2	5
Valor de $f'(x)$	12	3
Signo de $f'(x)$	+	+

7. $f(x)$ no tiene ni máximo ni mínimo porque $f'(x)$ no cambia de signo. $f(x)$ es creciente antes y después del punto crítico, tiene un punto de inflexión.

8. Las coordenadas del punto de inflexión son $f(4) = (4 - 4)^3 = 0$, $(4,0)$.

III. $f(x) = x^2 - 4x + 5$

1. $f'(x) =$ ____________________
2. $2x - 4 = 0$.
3. De donde $x_1 =$ _____.
4. El valor 2 divide al eje X en dos intervalos ajenos: $(-\infty,2)$ y $(2,\infty)$.

5 y 6.

Intervalo	$(-\infty,2)$	$(2,\infty)$
Valor de x	0	5
Valor de $f'(x)$	-4	6
Signo de $f'(x)$	-	+

7. $f(x)$ tiene un mínimo porque $f'(x)$ cambió de negativa a positiva.

8. El valor mínimo de $f_{min}(x)$ es $f(2) = 2^2 - 4(2) + 5 = 1$.

IV. $f(x) = x + \frac{1}{x},\ x \neq 0$

1. $f'(x)$ = ____________________

2. $1 - \frac{1}{x^2} = 0$

3. $1 - \frac{1}{x^2} = 0,\ 1 = \frac{1}{x},\ x^2 = 1,\ x = \pm$____; x_1=________, x_2 = _______.

4. Los valores 1 y -1 dividen al eje X en 3 intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ y $(1,\infty)$, sin embargo, como $f(x)$ no está definida en $x = 0$, el intervalo $(-1,1)$ debe descomponerse en dos, de manera que los intervalos a analizar son: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$.

5 y 6.

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Valor de x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
Valor de $f'(x)$	$\frac{3}{4}$	-3	-3	$\frac{8}{9}$
Signo de $f'(x)$	+	-	-	+

7. $f(x)$ tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 1$.

8. Los valores extremos son $f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -2$, $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$

V. $f(x)=\frac{3}{x^2+3}$.

1. $f'(x)=$ ____________________

2. $\frac{-6x}{\left(x^2+3\right)^2}=0$.

3. Puesto que $\left(x^2+3\right)^2$ siempre será mayor que cero, la única posibilidad de que $\frac{-6x}{\left(x^2+3\right)^2}=0$ es que $-6x=0$, ,de donde $x_1=0$.

4. El valor $x=0$ divide al eje X en dos intervalos: $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$

5 y 6.

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,\infty)$
Valor de x	-1	1
Valor de $f'(x)$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3}{8}$
Signo de $f'(x)$	+	-

7. $f(x)$ tiene un máximo en $x=0$.

8. El valor máximo es $f_{\max}(0)=\frac{3}{0^2+3}=1$

VI. $f(x)=-3x^5+5x^3+1$

1. $f'(x)=$ ____________________

2. $-15x^4+15x^2=0$

3. $-15x^2(x^2-1)=0, x_1=0, x_2=1$ y $x_3=-1$.

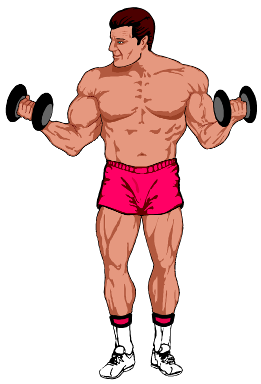
4. Los valores $-1, 0$ y 1 dividen al eje X en cuatro intervalos: $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$.

5 y 6.

Intervalo	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
Valor de x	-2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
Valor de f'(x)	-180	$\frac{45}{16}$	$\frac{45}{16}$	-180
Signo de f'(x)	-	+	+	-

7. *f(x)* tiene un mínimo en $x = -1$, un punto de inflexión en $x = 0$ y un máximo en $x = 1$.

8. $f(-1) = -1$; inflexión $f(0) = 1$, $(0,1)$; $f(1) = 3$



Ejercicio

Aplicando el criterio de la primera derivada, encontrar los valores extremos y puntos de inflexión de cada una de estas funciones.

1. $f(x) = -2x^2 + 6x + 1$
2. $f(x) = x^2 - 8x$
3. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$
4. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
5. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
6. $f(x) = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$
7. $f(x) = x^4 - \frac{8x^3}{3}$
8. $f(x) = \sqrt[3]{x}(8 - x)$