CONCEPTOS CLAVE

1. Función positiva:

Geométricamente, una función es **positiva** en la región en que su gráfica se encuentra **arriba** del eje de las abscisas.

2. Función negativa:

Geométricamente, una función es **negativa** en la región en que su gráfica se encuentra **abajo** del eje de las abscisas.

3. Función creciente:

Una función es **creciente** en una región, si y sólo si al aumentar los valores de la variable independiente $\boldsymbol{x}$, aumentan también los valores de la función. Es decir, *f(x)* es creciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2: siempre que $\boldsymbol{x_2 > x_1}$ necesariamente $\boldsymbol{f(x_2) > f(x_1)}$ e inversamente**.**

4. Función decreciente:

Una función es **decreciente** en una región, si y sólo si al aumentar los valores de la variable independiente $\boldsymbol{x}$, disminuyen los valores de la función. Es decir, *f(x)* es decreciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2: siempre que $\boldsymbol{x_2 > x_1}$ necesariamente $\boldsymbol{f(x_2) < f(x_1)}$ e inversamente**.**

Para toda función *f(x)*, derivable en un intervalo *(a,b):*

5. Si $f'(x) > 0$ para todo valor *x* en *(a,b)*, *f(x)* es **creciente** en *(a,b)*.

6. Si $f'(x) < 0$ para todo valor *x* en *(a,b)*, *f(x)* es **decreciente** en *(a,b)*.

7. Si $f'(x) = 0$ para todo valor *x* en *(a,b)*, *f(x)* es **constante** en *(a,b)*. Este caso nos será particularmente útil en el caso en que el intervalo conste de un solo punto *[a,a].*

8. A cada valor de *x* en el que $f'(x) = 0$, se le llama **punto crítico**.

9. Valores extremos de una función

Se llama valores extremos de una función a sus **máximos** y **mínimos**.

10. Punto crítico

a) Un punto crítico se caracteriza, **geométricamente**, porque la gráfica de la función en ese punto está momentáneamente horizontal, **es constante**.

b) Un punto crítico x_1, se caracteriza, **algebraicamente**, porque la primera derivada de la función **vale cero** cuando se evalúa en él: $f(x_1) = 0$.

c) Una función *f(x)* tiene **puntos críticos** en los valores *x* del dominio que hacen que la primera derivada valga **cero**.

11. Valor máximo

Geométricamente, un valor máximo es el **más alto** en una curva. Se llama **máximo local** si es el punto más alto sólo de una región. Si lo es en todo el dominio, se llama **máximo absoluto**.

12. Valor mínimo

Geométricamente, un valor mínimo es el **más bajo** en una curva. Se llama **mínimo local** si es el punto más bajo sólo de una región. Si lo es en todo el dominio, se llama **mínimo absoluto**.

13. En la región en que *f(x)* tiene un **máximo**, cambia de ser creciente a decreciente, cuando recorremos el eje *X* de izquierda a derecha.

14. En la región en que *f(x)* tiene un **mínimo**, cambia de ser decreciente a creciente, cuando recorremos el eje *X* de izquierda a derecha.

15. **Geométricamente**, un punto de **inflexión** se localiza donde la gráfica de la función cambia de ser cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba o viceversa, si existe la tangente en ese punto.

16. En la región en que *f(x)* tiene un **punto de inflexión**, **no** cambia su carácter creciente o decreciente, cuando recorremos el eje *X* de izquierda a derecha.

17. Criterio de la **primera derivada** para determinar valores extremos de una función:

Hipótesis. Si *f(x)* es una función continua en el intervalo *(a,b),* X_1 es el único punto crítico en ese intervalo y *f(x)* es derivable en *(a,b)*, entonces:

Tesis. El punto crítico $\left(x_1, f(x_1)\right)$ se puede clasificar de acuerdo con la siguiente tabla:

Signo de *f'(x)* en (a, x_1)	Signo de *f'(x)* en (x_1, b)	Decisión
+	-	$f(X_1)$ es un máximo
-	+	$f(X_1)$ es un mínimo
+	+	$f(X_1)$ es un posible punto de inflexión
-	-	$f(X_1)$ es un posible punto de inflexión

Al hecho de curvarse hacia arriba o hacia abajo una gráfica, le llamaremos **concavidad**.

18. Concavidad hacia arriba

Donde una función es cóncava hacia **arriba**, sus tangentes están por **debajo** de ella y sus pendientes son **crecientes**.

19. Concavidad hacia abajo

Donde una función es cóncava hacia **abajo**, sus tangentes están por **arriba** de ella y sus pendientes **decrecen**.

20. Cómo determinar el tipo de concavidad de una gráfica

Para toda función $f(x)$ cuya segunda derivada existe en el intervalo (a,b):

- ✓ Si $f''(x) > 0$ para todo valor x en (a,b), la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia **arriba** en (a,b).
- ✓ Si $f''(x) < 0$ para todo valor x en (a,b), la gráfica de $f(x)$ es cóncava hacia **abajo** en (a,b).
- ✓ **21**. a) Una función $f(x)$ tiene un **máximo** en un punto x_1, sólo si $f''(x_1)$ es **negativa**.
- ✓ b) Una función $f(x)$ tiene un **mínimo** en un punto x_2, sólo si $f''(x_2)$ es **positiva**.
- ✓ c) Una función $f(x)$ tiene un punto de **inflexión** en x_3, sólo si $f''(x_3)$ vale **cero**.

22. Criterio de la **segunda derivada** para determinar valores extremos de una función:

Hipótesis. Si $f(x)$ es una función que tiene primera y segunda derivada en un intervalo (a,b) y tiene un punto crítico en $x = x_1$.

Tesis. El punto crítico $(x_1, f(x_1))$ puede clasificarse de acuerdo con el siguiente criterio:

- ➢ Si $f''(x_1)$ **>** 0, $f(x)$ tendrá un mínimo en x_1, porque es cóncava hacia arriba.
- ➢ Si $f''(x_1)$ **<** 0, $f(x)$ tendrá un máximo en x_1, porque es cóncava hacia abajo.

Si $f''(x_1)$ **=** 0, $f(x)$ podría tener un punto de inflexión en x_1, si está cambiando de concavidad.