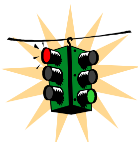
COMPORTAMIENTO GRÁFICO Y PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

Sugerencia para el profesor.

Comentar con los alumnos que después del esfuerzo invertido en unidades anteriores, para adquirir conceptos tan importantes como el de límite y el de derivada, en esta unidad tendrá oportunidad de aplicar lo aprendido a la solución de una amplia gama de problemas, que le harán descubrir la enorme variedad de situaciones teóricas y prácticas donde se aplica el Cálculo, mejorará su comprensión de las interrelaciones que se establecen entre las Matemáticas y otras áreas del conocimiento, resolverá problemas para los que el Álgebra no es suficiente y ampliará su capacidad para construir e interpretar gráficas de funciones.

RELACIÓN ENTRE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN Y SU PRIMERA DERIVADA



Conceptos clave:

1. Función positiva:

Geométricamente, una función es **positiva** en la región en que su gráfica se encuentra **arriba** del eje de las abscisas.

2. Función negativa:

Geométricamente, una función es **negativa** en la región en que su gráfica se encuentra **abajo** del eje de las abscisas.

3. Función creciente:

Una función es **creciente** en una región, si y sólo si al aumentar los valores de la variable independiente x, aumentan también los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es creciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2: siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) > f(x_1)$ e inversamente**.**

4. Función decreciente:

Una función es **decreciente** en una región, si y sólo si al aumentar los valores de la variable independiente x, disminuyen los valores de la función. Es decir, $f(x)$ es decreciente en una región si para dos puntos cualesquiera x_1 y x_2: siempre que $x_2 > x_1$ necesariamente $f(x_2) < f(x_1)$ e inversamente**.**

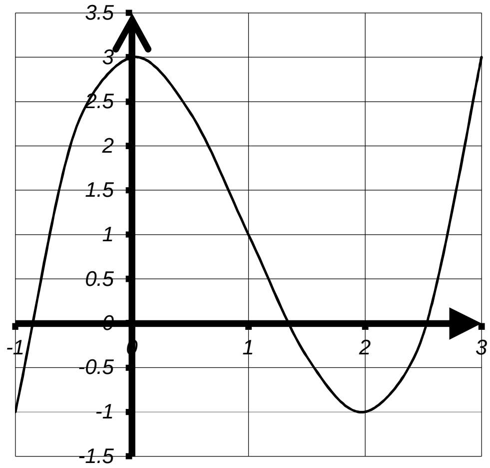
Geométricamente:

Una función es **creciente** en la región en que su gráfica **sube** a medida que recorremos el eje X de izquierda a derecha.

Una función es **decreciente** en la región en que su gráfica **baja** a medida que recorremos el eje X de izquierda a derecha.

Una función es **constante en un punto**, si su gráfica se encuentra momentáneamente **horizontal**, la curva continua terminó de subir pero aún no empieza a bajar, o al revés.

Ejemplo 1



Presentamos aquí una función en la que están definidas con precisión las regiones que nos interesa analizar. Observando la figura y aprovechando la experiencia que el estudiante tiene en el análisis de gráficas, completará lo siguiente:

La función mostrada es **decreciente** en el intervalo que empieza inmediatamente después de ______ y termina inmediatamente antes de _______. Es decir, $f(x)$ es decreciente en el intervalo abierto (____, ____). ¿Por qué intervalo abierto?

____

La misma función es **creciente** en dos regiones: desde menos infinito hasta _________, sin llegar a cero, o sea en el intervalo (____, ____). Y también es creciente en el intervalo (____, ____).

La función mostrada es constante en los puntos x_1= _____ y x_2 = ____

Usa la aproximación que juzgues conveniente para expresar los siguientes intervalos:

La función graficada es **positiva** en los intervalos __________ y _________.

La función graficada es **negativa** en los intervalos __________ y _________.

Sugerencia para el profesor

Hacer énfasis en las siguientes consideraciones:

1. Cuando una recta es creciente, su pendiente es positiva.

2. Cuando una recta es decreciente, su pendiente es negativa.

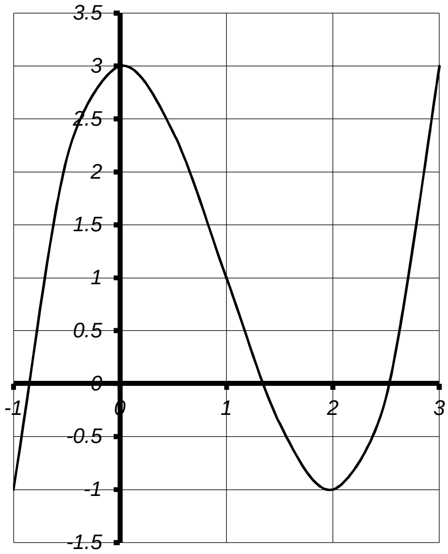
3. Cuando una recta es constante, su pendiente es cero.

4. La pendiente de una curva en un punto es justamente la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

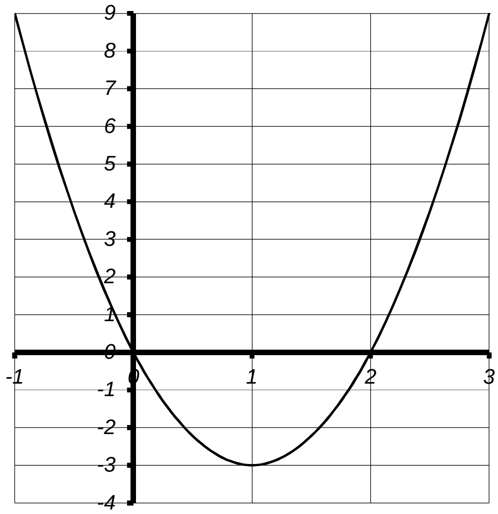
5. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$, en cualquier punto del dominio, es precisamente la primera derivada de la función evaluada en ese punto.

A continuación aparecen las gráficas de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, que presentamos antes, así como la gráfica de su primera derivada, $f'(x) = 3x^2 - 6x$, para verificar lo afirmado en los 5 puntos anteriores.

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$



$f'(x) = 3x^2 - 6x$



El estudiante observará ambas gráficas y completará:

a) La función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $(0, 2)$, ¿cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo?

b) La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 0)$, ¿cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo?

c) La función $f(x)$ es creciente en el intervalo $(2, \infty)$, ¿cómo es su derivada $f'(x)$ en ese intervalo?

d) La función $f(x)$ es constante en los puntos $x = 0$ y $x = 2$, ¿cómo es su derivada $f'(x)$ en esos puntos?

Los hechos que acaba de observar el estudiante no son una coincidencia, ni un caso aislado, corresponden a una relación muy importante entre una función y su primera derivada. Partiendo de esto, resolverá el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1

1. Redactar la relación que se observó entre el carácter creciente o decreciente de una función y el signo de su primera derivada, en un intervalo dado.

2. Verificar la conjetura probando con valores específicos y comparando el carácter de $f(x)$ que se observa en la gráfica con el signo de $f'(x)$ que se obtiene al evaluarla, por ejemplo en $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$.

3. Sin ver la gráfica de una función, ¿cómo es posible saber en qué puntos de su dominio es constante, es decir, dónde está momentáneamente horizontal, o sea, dónde terminó de subir y aún no empieza a bajar o al revés?

Considerando las respuestas obtenidas en el ejercicio anterior, es posible construir los siguientes criterios de caracterización: