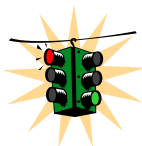


## PROBLEMAS DE APLICACIÓN: CÁLCULO DE VELOCIDADES



Conceptos clave:

### 11. Velocidad instantánea

Sea  $s(t)$  la posición de cierto objeto moviéndose en el tiempo  $t$ .

Si  $s(t) > 0$  significa que el objeto está a la derecha o hacia arriba del origen.

Si  $s(t) < 0$  significa que el objeto está a la izquierda o hacia abajo del origen.

Si  $s(t) = 0$  significa que el objeto está en el origen.

La velocidad instantánea, es decir, la velocidad de dicho objeto en un instante determinado  $t_0$  está dada por:

$$v(t_0) = s'(t_0)$$

Si  $v(t_0) > 0$  significa que el cuerpo se mueve en dirección positiva (hacia la derecha o hacia arriba)

Si  $v(t_0) < 0$  significa que el cuerpo se mueve en dirección negativa (hacia la izquierda o hacia abajo)

Si  $v(t_0) = 0$  significa que el cuerpo está en reposo

### Sugerencias para el profesor



*A manera de introducción, se puede iniciar con una explicación o análisis de un problema que involucre posición y velocidad, ya que este tipo de ejercicios se relacionan más con el contexto o entorno de los estudiantes.*



Si un automóvil parte de CCH Azcapotzalco hacia CCH Naucalpan y tarda 20 minutos en completar dicho trayecto el cual consta de 7km, ¿a qué velocidad viajó el automóvil?

La velocidad se puede calcular como  $v = \frac{e}{t}$ , de tal forma que al sustituir los valores correspondientes,  $v = \frac{7}{0.5} = 14k/h$ , sin embargo, sabemos que se trata de una velocidad promedio, ya que 14k/h es una velocidad muy baja para un automóvil, pero en un trayecto como el que se indica, hay semáforos, tráfico, baches,

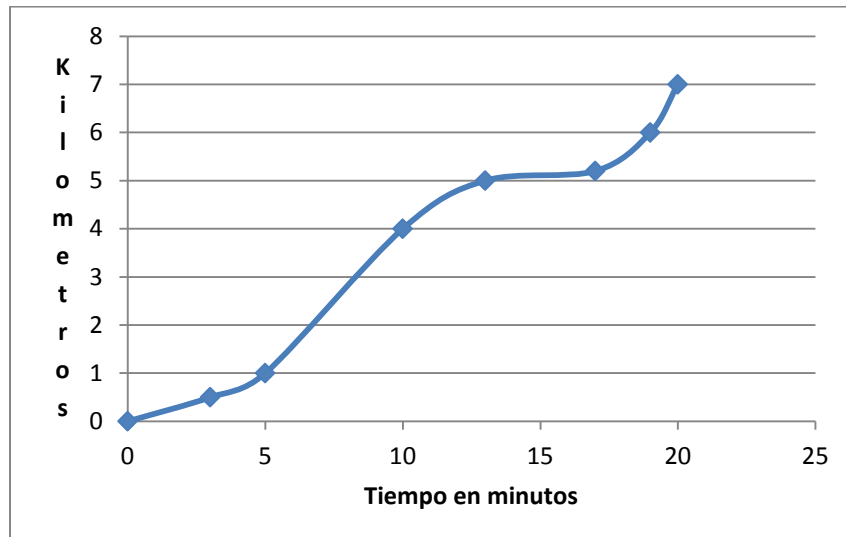
entre otros. Seguramente la velocidad en algunos tramos fue mayor a 14k/h en otros fue menor e incluso hubo altos totales.

Si trazamos la grafica de una función que describa la posición (desplazamiento) del vehículo con base en el tiempo transcurrido obtendremos una grafica no lineal, ya que el desplazamiento del auto no es uniforme.

En la tabla se indican algunos de los desplazamientos del vehículo mencionado.

Tiempo en minutos	Desplazamiento en kilómetros
0	0
3	1
5	2
10	3
13	4
17	5
19	6
20	7

La grafica correspondiente es la que se muestra



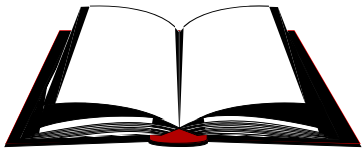
Si deseáramos obtener la velocidad promedio entre el minuto 10 y 13, debemos hacer la división entre la diferencia de la distancia que a su vez está en función del tiempo  $s(t_2) - s(t_1)$ , entre la diferencia del tiempo en ese intervalo de tiempo, es decir,  $t_2 - t_1$ :

$$v(t) = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Podríamos tomar intervalos de tiempo cada vez más pequeños y hacer que  $\Delta t \rightarrow 0$ , con lo cual obtendríamos la velocidad en cada instante (velocidad instantánea).

De esta forma cuando tenemos una función de desplazamiento en función del tiempo, por ejemplo  $s(t)$ , para obtener la velocidad instantánea deberemos obtener  $v(t) = s'(t)$ .

**Procedimiento para obtener la velocidad instantánea en el instante  $t_0$ , esto es:  $v(t) = s'(t)$ .**



que ya conoces.

1. Obtén la derivada  $s'(t)$  con alguno de los métodos

2. Evalúa la derivada en el punto  $t_0$   $v(t_0) = s'(t_0)$ .

**Ejemplos**



1) Se ha determinado que  $s(t) = 60t^2 + t$  es la expresión que representa la distancia a que se encuentra cierta clase de halcón que viaja en línea recta desde su punto de partida (la expresión solo es válida para las primeras dos horas de vuelo). La distancia  $s(t)$  esta medida en kilómetros y el tiempo en horas. ¿Cuál es la velocidad instantánea a los 90min. (1.5 hrs)?

1.  $v(t) = s'(t)$  \_\_\_\_\_

2. Evaluando la derivada en 1.5 horas.  $v(1.5) =$  \_\_\_\_\_

La distancia del halcón al cabo de 2hrs, puede obtenerse fácilmente al evaluar  $s(t)$  cuando  $t = 2$ , de esta forma sabemos que  $s(t) =$  \_\_\_\_\_

¿Cuál es la velocidad instantánea del halcón al cabo de 0.5 hrs, 1 hr y 2hrs?

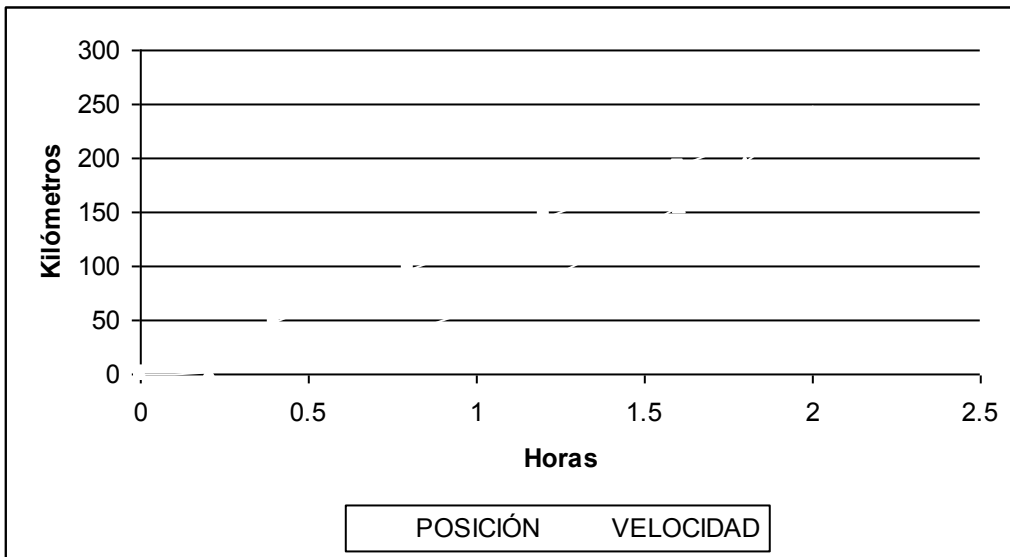
\_\_\_\_\_

Para encontrar la velocidad promedio del halcón entre la primera y segunda hora, se debe encontrar las distancias en 1 y 2 horas y dividirla entre la diferencia de estas tiempos, es

decir,  $\bar{v} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{s(2) - s(1)}{\quad - \quad}$ , por lo tanto la velocidad promedio resultante

es: \_\_\_\_\_

Elabora las graficas de movimiento (posición  $s(t)$ ) y velocidad ( $v(t)$ ) del halcón.



### Puntos problemáticos

Algunos estudiantes memorizan los pasos que deben hacer sin preocuparse por comprender el problema y lo que se está solicitando en el mismo. Se debe avanzar sin prisa, pues para algunos alumnos los ejercicios resultan complicados y pueden ser tediosos si no le encuentran un sentido práctico.

2) Se lanza un objeto desde el suelo hacia arriba a una velocidad inicial de 121m/seg. Se sabe que la distancia que recorre dicho objeto desde su punto de partida a los  $t$  segundos es:  $s(t) = 121t - 11t^2$

¿Cuál es la distancia recorrida en 5 segundos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la expresión para obtener la velocidad del objeto en cualquier instante?

1.  $v(t) = s'(t)$  \_\_\_\_\_

2. ¿Cuál es la velocidad instantánea a los dos segundos? \_\_\_\_\_

¿Cuál es la velocidad del objeto en 0.5 seg, 1.9 seg y 2.8 seg?

\_\_\_\_\_

¿En qué tiempo el objeto lanzado desde el suelo alcanzara una altura máxima?

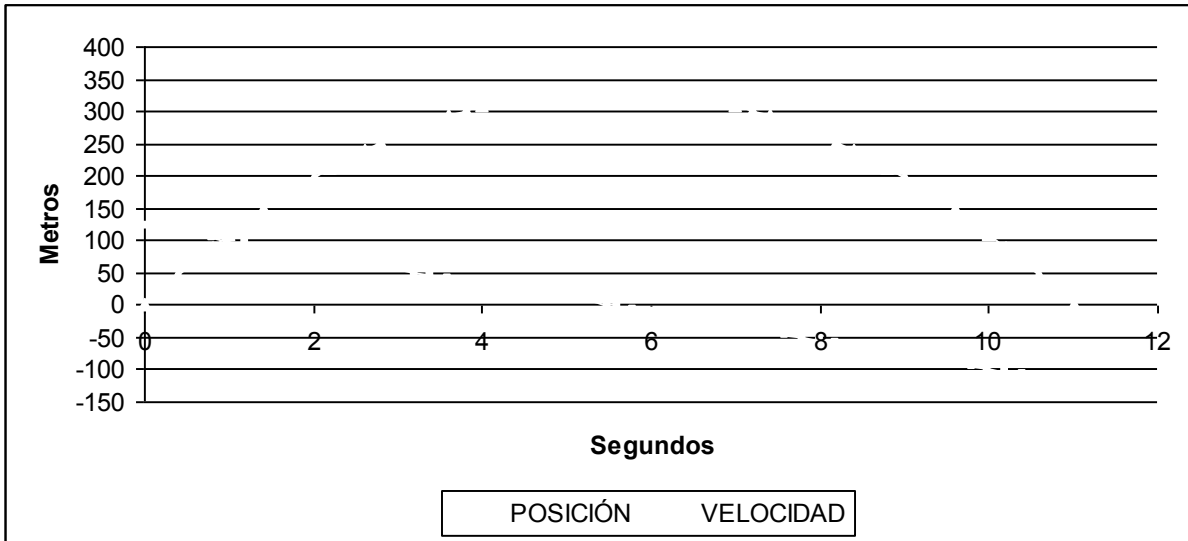
Completa la tabla para distintos valores de  $s(t)$  y  $v(t)$ , e indica la dirección del movimiento.

$T$	0	1	2	3	4	5	5.5	6	7	8
$s(t)$ en metros										
$v(t)$ en m/s										
Dir. del Movimiento										

Apóyate en la tabla anterior y dibuja con flechas la dirección del movimiento



Elabora las graficas de movimiento (posición  $s(t)$ ) y velocidad ( $v(t)$ ) del objeto lanzado.



La distancia total recorrida entre los segundos 0 y 11

$$s(5.5) - s(0) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$s(11) - s(5.5) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mts}$$

3) Se ha visto que durante el movimiento de un objeto, la razón de cambio de la posición  $s(t)$  es la velocidad, esto es que  $v(t) = s'(t)$ , pero la velocidad también puede cambiar con el tiempo. Si la razón de cambio instantáneo de la velocidad con respecto al tiempo se le llama aceleración que se describe como  $a(t) = v'(t)$ , encuentra una expresión para calcular la aceleración de un objeto en el instante  $t$  utilizando su posición  $s(t)$ .

En los ejemplos anteriores, ¿Cuál sería la función de aceleración?



## Ejercicios

Para cada uno de los siguientes ejercicios contesta lo que se te pide.

1.- Un vendedor te ofrece un carro de juguete a control remoto, se sabe que en línea recta la función de posición del mismo es:  $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 5t + 10$ , el tiempo está en segundos y la distancia en metros.

a) ¿Qué distancia teóricamente recorrería en 3, 4 y 6 segundos?

\_\_\_\_\_

b) ¿Que significa que la distancia sea negativa en los segundos 3, 4 y 6?

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es la velocidad en el instante  $t$ ?

d) ¿Cuál es la velocidad instantánea en 3, 4 y 6 segundos?

\_\_\_\_\_

e) ¿Qué significa que la velocidad sea negativa en los segundos 3 y 4, y positiva en el segundo 6?

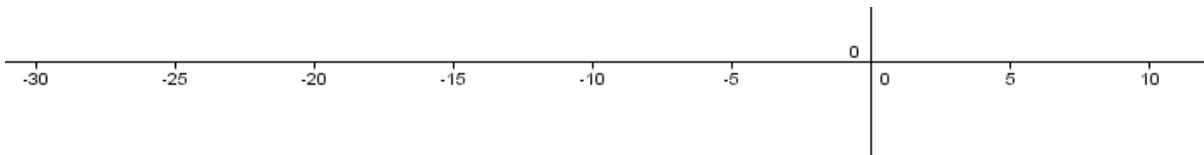
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

f) ¿En que tiempos carro a control remoto está en reposo? \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_

g) Completa la tabla para distintos valores de  $s(t)$  y  $v(t)$ , e indica la dirección del movimiento.

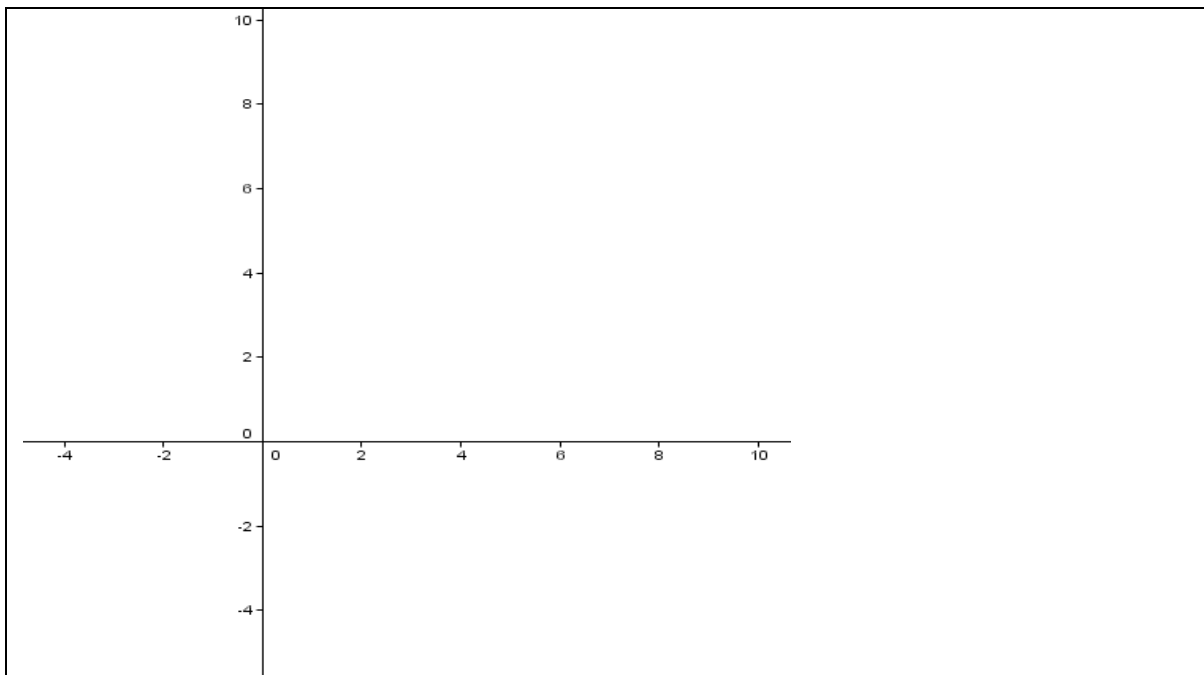
$T$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$s(t)$									
$v(t)$									
<i>Dir. del Movimiento</i>									

h) Apóyate en la tabla anterior y dibuja con flechas la dirección del movimiento



i) ¿Cuál es la velocidad promedio entre los segundos 1 y 4? \_\_\_\_\_ km/h

j) Elabora las graficas de posición  $s(t)$  y velocidad  $v(t)$



k) ¿Cuál es la distancia total recorrida en el intervalo  $[-2,6]$ ? \_\_\_\_\_ mts



2. - Dos cohetes robot tomarán muestras de las partículas suspendidas en el aire y medirán la cantidad de luz ultravioleta que deja pasar la capa de ozono, ambos cohetes son liberados a una altura de 2000mts sobre el nivel del mar.

Viajando en línea recta, los cohetes deben cubrir cada uno una distancia de al menos 1200 km en las primeras 2 hrs y en tres horas al menos 1300 km.

Los cohetes deben regresar a una distancia de por lo menos 1100 kms del punto desde donde fueron lanzados en las siguientes tres horas, es decir, seis horas después de que hayan sido lanzados. Si alguno de los cohetes robot falla en alguna de las pruebas, deberá ser desechado.

Se sabe que las funciones de distancia de los dos cohetes son:

Cohete 1:  $s(t) = 20t^3 - 270t^2 + 1080t$

Cohete 2:  $s(t) = 16t^3 - 216t^2 + 864t + 300$

a) ¿Cuál es la distancia recorrida por cada cohete en 1.5 hrs?

\_\_\_\_\_

b) ¿Cuál es la velocidad instantánea de cada cohete en 1hr 2hrs y 2.5 hrs?

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

c) ¿Cuál es la distancia máxima que recorre cada uno de los cohetes antes del regreso de los mismos?

\_\_\_\_\_

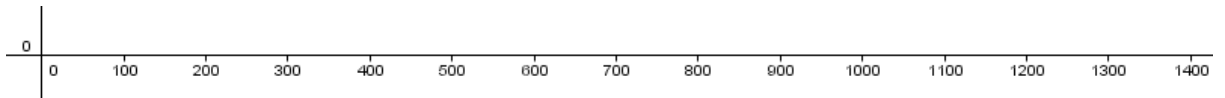
d) ¿En qué tiempo los cohetes comienzan a regresar hacia el lugar desde donde fueron lanzados?

\_\_\_\_\_

e) Completa la tabla para distintos valores de  $s(t)$  y  $v(t)$  del cohete 1, e indica la dirección del movimiento.

<i>T en horas</i>	0	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
$s(t)$										
$v(t)$										
<i>Dir.,. del movimiento</i>										

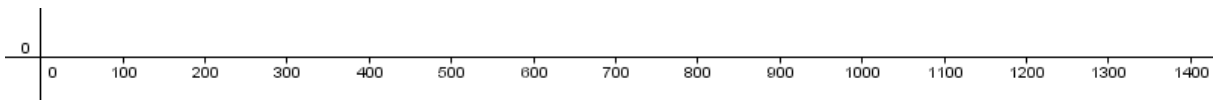
f) Apóyate en la tabla anterior y dibuja con flechas la dirección del movimiento del Cohete 1



g) Completa la tabla para distintos valores de  $s(t)$  y  $v(t)$  del cohete 2, e indica la dirección del movimiento.

<i>T en horas</i>	0	0.5	1.5	2	2.5	3	3.5	4	5	6
$s(t)$										
$v(t)$										
<i>Dir.,. del movimiento</i>										

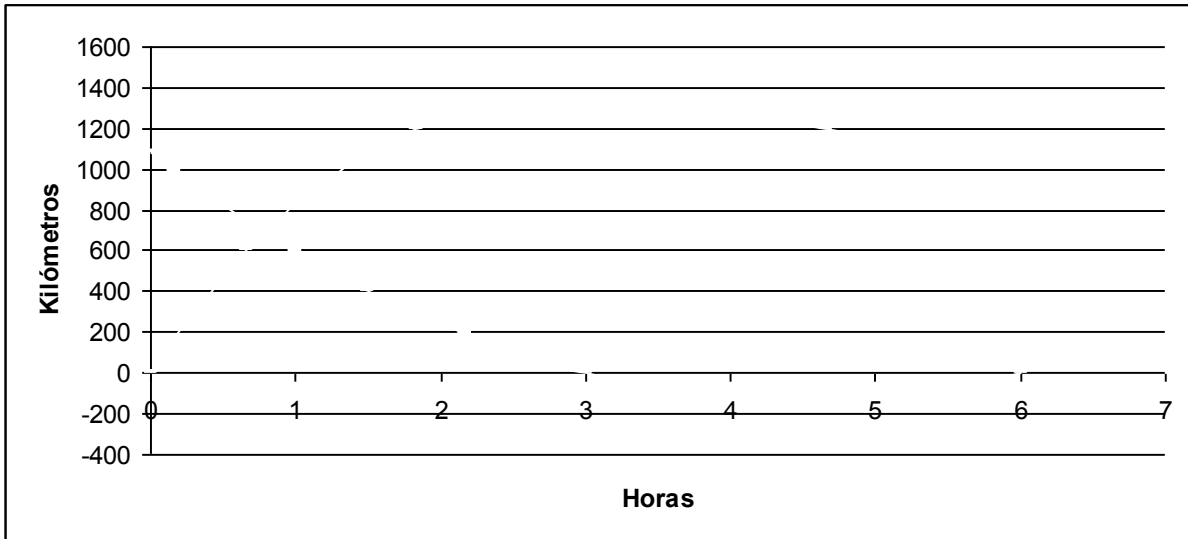
h) Apóyate en la tabla anterior y dibuja con flechas la dirección del movimiento del Cohete 2



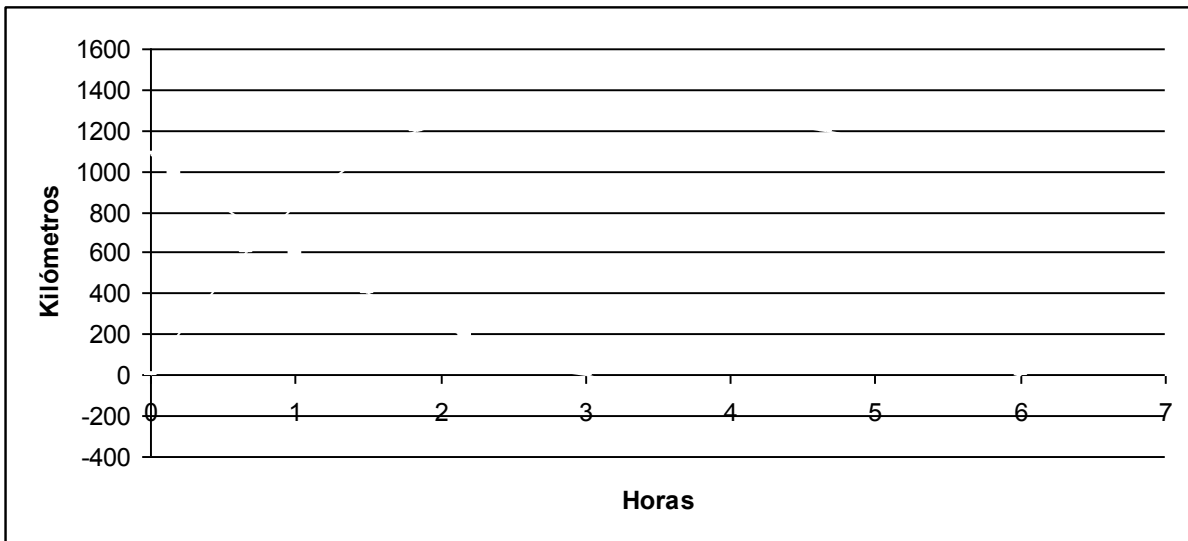
i) ¿Cuál es la velocidad media de cada uno de los cohetes entre la segunda y tercera horas?

\_\_\_\_\_

j) Elabora las graficas de distancia  $s(t)$  y velocidad  $v(t)$  para el cohete 1



k) Elabora las graficas de distancia  $s(t)$  y velocidad  $v(t)$  para el cohete 2



m) ¿Cuál de los dos cohetes debe ser reemplazado?

\_\_\_\_\_

3.- Para los ejercicios 1 y 2 anteriores, encuentra la función de aceleración.