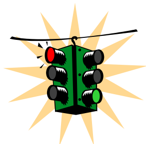
DERIVADA DEL PRODUCTO DE FUNCIONES



Conceptos clave:

7. Derivada del producto de dos funciones

Si $f(x)=g(x)h(x)$, la derivada de $f(x)$ siendo $g(x)$ y $h(x)$ funciones derivables, es igual a

$$f'(x)=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$$

Sugerencias para el profesor

Iniciar con funciones tales que $f(x)=g(x)h(x)$, se pueden hacer preguntas a los alumnos después de haber visto algunos ejercicios. Por ejemplo en $f(x)=x^2(x+2)$.

¿Cuál es la función $g(x)$?
¿Cuál es la función $h(x)$?
¿Cómo encontrarías la derivada de $f(x)$?

Regularmente los alumnos intentan obtener la derivada ejecutando los mismos pasos que para la suma, es decir, obteniendo la derivada de $g(x)$ y $h(x)$, por separado y posteriormente multiplicando ambas derivadas. Otros alumnos posiblemente multiplicarán $x^2(x+2)$ obteniendo (x^3+2x^2) función que después derivarán.

Partiendo de los resultados obtenidos, los cuales serán diferentes, se puede indicar a los alumnos que para obtener la derivada del producto de funciones no se procede igual que para la derivada de una suma de funciones. Haciendo uso del límite del cociente de Fermat podemos indicar lo siguiente:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Partiendo de ese límite y dado que $f(x) = g(x)h(x)$ y $f(a) = g(a)h(a)$ entonces:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)h(x) - g(a)h(a)}{x - a}$$

Si sumamos y restamos al numerador del límite anterior $g(x)h(a)$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)h(x) - g(a)h(a) + g(x)h(a) - g(x)h(a)}{x - a}$$

Reordenando los términos del numerador

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)h(x) - g(x)h(a) + g(x)h(a) - g(a)h(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(x)[h(x) - h(a)] + h(a)[g(x) - g(a)]}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{g(x)[h(x) - h(a)]}{x - a} + \lim_{x \to a} \frac{h(a)[g(x) - g(a)]}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} g(x) \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} h(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} g(x). \lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} + \lim_{x \to a} h(a). \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

De acuerdo con lo ya visto, se sabe que $\lim_{x \to a} \frac{h(x)-h(a)}{x-a} = h'(a)$ y que $\lim_{x \to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = g'(a)$. Por lo tanto:

$$f'(a) = g(a)h'(a) + h(a)g'(a)$$

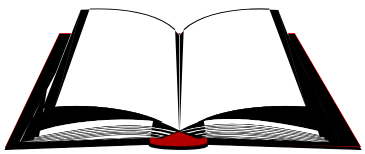
De esta forma, si se cumple que $f(x) = g(x)h(x)$ la derivada del producto de estas funciones, se obtiene mediante:

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

Sugerencias para el profesor

Resolver algunos ejercicios junto con los alumnos, de tal forma que paulatinamente adquieran práctica en la derivada de un producto de funciones. Se proponen ejercicios para resolver en parejas o de forma individual como los que a continuación se muestran.

Procedimiento para derivar un producto de funciones



1. Identificar $g(x)$ y $h(x)$
2. Obtener la derivada de $g(x)$
3. Obtener la derivada $h(x)$
4. Obtener el producto $g(x)h'(x)$
5. Obtener el producto $h(x)g'(x)$

6.- Sumar el resultado de los pasos 4 y 5, es decir, $g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$

Ejemplos

1) Obtener la derivada de la función $f(x) = (6x^2 - x)(x - 1)$

Siguiendo el procedimiento para derivar el producto de dos funciones

a) $g(x) =$ __________ ; $h(x) =$ __________

b) $g'(x) =$ ______________

c) $h'(x) =$ ______________

d) $g(x) \cdot h'(x) =$ ___________________

e) $h(x) \cdot g'(x) =$ ___________________

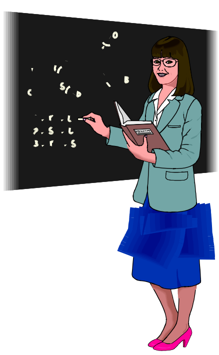
f) $f'(x) =$ _______________ + _______________ = ________________

Puntos problemáticos

Algunos alumnos cometen errores algebraicos, el profesor debe proponer ejercicios que por lo menos en un principio, no presenten grandes dificultades algebraicas y más bien los alumnos puedan centrarse en el procedimiento de obtención de la derivada de un producto.

Sugerencias para el profesor

Supervisar a los alumnos teniendo cuidado de que no cometan errores algebraicos, de ser el caso, indicárselo al alumno.



2) Obtener la derivada de la función $f(x) = (4x^2 - 2x)(6x^3 + 5x^2)$

Siguiendo el procedimiento para derivar el producto de dos funciones

a) $g(x) =$ __________ ; $h(x) =$ __________

b) $g'(x) =$ ______________

c) $h'(x) =$ ______________

d) $g(x) \cdot h'(x) =$ ___________________

e) $h(x) \cdot g'(x) =$ ___________________

f) $f'(x) =$ _______________ $+$ _______________ $=$ ________________

3) Obtener la derivada de $f(x) = (3x^4 - \sqrt[3]{x})(4\sqrt{x} + \frac{2}{3}x)$

Siguiendo el procedimiento para derivar el producto de dos funciones

a) $g(x) =$ __________ ; $h(x) =$ __________

b) $g'(x) =$ ______________

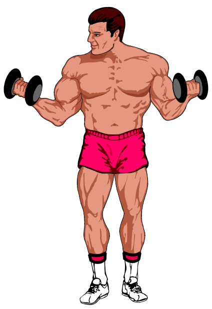
c) $h'(x) =$ ______________

d) $g(x) \cdot h'(x) =$ ___________________

e) $h(x) \cdot g'(x) =$ ____________________

f) $f'(x) =$ ________________ $+$ ________________ $=$ _________________

Ejercicios



1. $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$

2. $f(x) = (2x - 1)(4x^3 + 8x)$

3. $f(x) = \left(\frac{1}{6}x - 3\right)(x + x^2)$

4. $t(x) = (x^{-2} - 3)(x^3 + x^{\frac{1}{2}})$

5. $t(x) = (x^{-2} + 3x)(\frac{1}{2}x^4 - 5x^3)$

6. $f(x) = (4x^3 - 1)^2(x^3 - x^2)$ *Ayuda: Desarrolla primero el binomio al cuadrado y después procede aplicando la regla de derivación para el producto.*