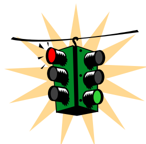
DERIVADA DE FUNCIONES DEL TIPO $f(x)=cx^n$



Conceptos clave:

1. Derivada de la función constante $f(x)=c$

Si $f(x)=c$, donde *c* es una constante, la derivada de esta función es siempre cero, es decir:

$$f'(x)=0$$

2. Derivada de una función del tipo $f(x)=x^n$

Si $f(x)=x^n$, donde *n* es cualquier número real, la derivada de esta función es:

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

3. Derivada de una función del tipo $f(x)=cx^n$

Si $f(x)=cx^n$, donde *n* y *c* son números reales, la derivada de esta función es:

$$f'(x)=cnx^{n-1}$$

4. Derivadas de orden superior.

Si $f(x)=x^n$, donde *n* es cualquier número real, la derivada de esta función es: $f'(x)=nx^{n-1}$ al derivarla nuevamente se obtiene la segunda derivada, es decir, la derivada de la derivada

$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}$$

La tercera derivada $f'''(x)$ se obtiene al derivar la expresión anterior, y así sucesivamente, hasta que esta sea igual a cero, de esta forma, es posible obtener la derivada n-ésima de una función $f(x)$.

Sugerencias para el profesor

Comenzar con ejercicios sencillos en donde se aplique el límite del cociente de Fermat. El profesor preguntando e invitando los alumnos a participar realiza y explica ciertos ejercicios, de tal forma que puedan deducir que la derivada de $f(x) = x^n$ es $f'(x) = nx^{n-1}$ y la derivada de $f(x) = cx^n$ es $f'(x) = ncx^{n-1}$

Ejercicio 1. Encontrar la derivada de $f(x) = c$ mediante el límite del cociente de Fermat . Como $f(x) = c$, para cada x, entonces $f(a) = c$.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x-a} = 0, \text{ por tanto, } f'(x) = 0$$

Ejercicio 2. Encontrar la derivada de $f(x) = x^2$ mediante el límite del cociente de Fermat.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a$$

$$f'(a) = 2a, \text{ por tanto, } f'(x) = 2x$$

Ejercicio 3. Encontrar la derivada de $f(x) = 3x^2$ mediante el límite del cociente de Fermat.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{3x^2-3a^2}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{3(x-a)(x+a)}{x-a} = \lim_{x\to a} 3(x+a)$$

$= 3(2a) = 6a$, por tanto, $f'(x) = 6x$

Puntos problemáticos

Algunos alumnos pueden tener dificultades al momento de realizar las operaciones algebraicas, ayuda mucho el que sepan factorizar.

Ejercicio 4. Encontrar la derivada de $f(x) = -\frac{3}{4}x^2$ mediante el limite cociente de Fermat.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{3}{4}x^2 - (-\frac{3}{4}a^2)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{3}{4}(x^2-a^2)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{3}{4}(x-a)(x+a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a} -\frac{3}{4}(x+a) = -\frac{3}{4}(2a) = -\frac{6}{4}a = -\frac{3}{2}a$$

De esta forma, $f'(x) = -\frac{3}{2}x$

Ejercicio 5. Encontrar la derivada de $f(x) = 5x^3$ mediante el límite del cociente de Fermat.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{5x^3 - 5a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{5(x^3 - a^3)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{5(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} 5(x^2 + ax + a^2) = 5(3a^2) = 15a^2$$

$$f'(x) = 15x^2$$

Ejercicio 6. Encontrar la derivada de $f(x) = -3x^4$ mediante el límite del cociente de Fermat.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{-3x^4 + 3a^4}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-3(x^4 - a^4)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{-3(x^2 - a^2)(x^2 + a^2)}{x - a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{-3(x - a)(x + a)(x^2 + a^2)}{x - a} = \lim_{x \to a} - 3(x + a)(x^2 + a^2) = -3(2a)(2a^2)$$

$$f'(x) = -12x^3$$

Sugerencias para el profesor

Según las características del grupo, se realizar varios ejercicios para propiciar que alumno encuentre un patrón y obtener la derivada.

Preguntas para los alumnos: Observa la función y su derivada.
¿Encuentras algún patrón entre ellos?
¿Podrías encontrar la derivada de estas funciones sin utilizar el límite del cociente de Fermat?

Llena la siguiente tabla con los ejercicios que hasta ahora se han hecho

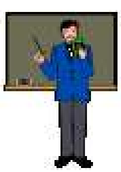
$\boldsymbol{f(x)}$	$\boldsymbol{f'(a)}$	$\boldsymbol{f'(x)}$
$f(x) = c$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = 3x^2$		
$f(x) = -\frac{3}{4}x^2$		

$f(x) = 5x^3$		
$f(x) = -3x^4$		

Es posible calcular la derivada de la derivada de cierta función, y a su vez esta última volver a derivarla, así sucesivamente, a este tipo de derivadas, se les conoce como **derivadas de orden superior**, las cuales tienen aplicaciones importantes que se verán posteriormente.

La notación que hasta ahora se ha manejado en esta guía para la derivada de $f(x)$, es $f'(x)$, la derivada de $f'(x)$, la cual se conoce como segunda derivada, se denota como $f''(x)$, si se desea derivar nuevamente $f''(x)$, se obtiene la tercera derivada $f'''(x)$.

Por ejemplo si $f(x) = -3x^4$, para obtener la segunda derivada de esta función, primero se debe obtener la primera derivada $f'(x) = -12x^3$ y la derivada de esta es $f''(x) = -36x^2$



Sugerencias para el profesor.

Indicar a los alumnos que existen en la bibliografía otro tipo de notaciones para la derivada y derivadas de orden superior, mismas que se muestran en la tabla siguiente.

Primera Derivada			Segunda Derivada		
a) $\frac{d}{dx}y$,	b) $f'(x)$,	c) $D_x f(x)$	a), $\frac{d^2}{dx^2}y$	b) $f''(x)$,	c) $D^2{}_x f(x)$
d) $\frac{dy}{dx}$,	e) $\frac{d}{dx}f(x)$,	f) y',	d) $\frac{d^2y}{dx^2}$,	e) $\frac{d^2}{dx^2}f(x)$,	f) y'',

Derivada n-ésima		
a) $\frac{d^n}{dx^n}y$,	b) $f''''\cdots(x)$,	c) $D^n{}_x f(x)$
d) $\frac{d^ny}{dx^n}$,	e) $\frac{d^n}{dx^n}f(x)$,	f) $y''''\cdots$,

Ejercicios

En las siguientes funciones, obtén la derivada que se indique.

No.	Función	Derivada
1	$f(x) = 8x$	$f'(x) =$
2	$f(x) = -2x^2$	$y'' =$
3	$f(x) = \frac{1}{3}x^5$	$\frac{d^3y}{dx} =$
4	$f(x) = -11x^{10}$	$\frac{d^3}{dx}f(x) =$
5	$f(x) = 41x^6$	$D^2{}_x f(x) =$
6	$f(x) = -\frac{4}{9}x^8$	$f'(x) =$
7	$f(x) = x^n$	$y'' =$
8	$f(x) = 3x^n$	$\frac{d^3}{dx}f(x) =$
9	$f(x) = cx^n$	$D^2{}_x f(x) =$

10.- ¿Qué puedes concluir sobre la derivada de una función del tipo $f(x) = cx^n$?

11.- Elabora un escrito en donde indiques claramente los pasos a seguir para obtener la primera derivada de una función como las vistas hasta ahora.

____

____

____

____

____