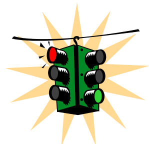
DERIVADA DEL COCIENTE DE FUNCIONES



Conceptos clave:

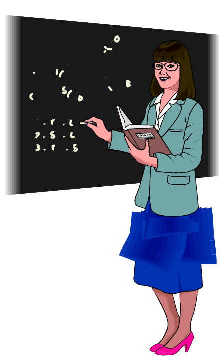
8. Derivada del cociente de dos funciones

Si $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ con $h(x) \neq 0$ y además $g(x)$ y $h(x)$ son dos funciones derivables, entonces la derivada de $f(x)$, está dada por

$$f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$

Sugerencias para el profesor

Iniciar con ejercicios en donde $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ *o hacer preguntas a los alumnos planteándoles algunos ejercicios.*



Ejemplo

1) En $f(x)=\frac{2}{x^2}$

¿Cuál es la función $g(x)$?
¿Cuál es la función $h(x)$?
¿Cómo encontrarías la derivada de $f(x)$?

2) En $f(x) = \frac{x^2+2x-1}{x}$

¿Cuál es la función $g(x)$?
¿Cuál es la función $h(x)$?
¿Cómo encontrarías la derivada de $f(x)$?

Quizás algunos alumnos aplicarán la regla para derivar el producto poniendo la función del primer ejemplo como: $f(x) = 2(x^{-2})$ o en el segundo ejemplo como $f(x) = (x^2 + 2x - 1)(x^{-1})$

Partiendo de los resultados obtenidos, se puede obtener la regla general para el cociente de dos funciones con $h(x) \neq 0$:

Sugerencias para el profesor

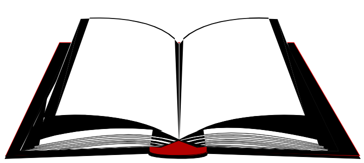
El profesor puede invitar a los alumnos a que hagan conjeturas, y de ser posible ellos mismos con la ayuda de profesor deduzcan la regla general para la derivada de un cociente de funciones.

La derivada de $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, se puede escribir también como $g(x) = h(x)f(x)$, aplicando la regla para el producto de funciones, $g'(x) = h(x)f'(x) + h'(x)f(x)$

$$f'(x) = \frac{g'(x) - h'(x)f(x)}{h(x)}$$

Como $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ sustituimos para obtener:

$$f'(x) = \frac{g'(x) - h'(x)\frac{g(x)}{h(x)}}{h(x)} = \frac{\frac{h(x)g'(x) - h'(x)g(x)}{h(x)}}{h(x)} = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)}$$



Procedimiento para derivar el cociente de funciones

. 1. Identificar $g(x)$ y $h(x)$
2. Obtener la derivada de $g(x)$
3. Obtener la derivada $h(x)$
4. Obtener el producto $g'(x)h(x)$
5. Obtener el producto $h'(x)g(x)$

6. Restar el resultado del paso 4 al resultado del paso 5, es decir, $g'(x)h(x) - h'(x)g(x)$.

7. Obtén $h^2(x)$

8. Divide el resultado obtenido en el paso 6 entre $h^2(x)$

Sugerencias para el profesor

Resolver algunos ejercicios junto con los alumnos, de tal forma que paulatinamente adquieran práctica en la derivada del cociente de funciones. Se proponen ejercicios para resolver en parejas o de forma individual como los que a continuación de muestran.

Ejemplos

1) Obtener la derivada de la función $f(x) = \dfrac{3x^2 - x}{x-1}$

$g(x)$ =________________ $h(x)$ =_______________

Siguiendo el procedimiento para derivar el cociente de dos funciones, identifica $g(x)$ y $h(x)$

a) $g(x) =$ __________ ; $h(x) =$ __________

b) $g'(x) =$ ______________

c) $h'(x) =$ ______________

d) $g'(x)h(x) =$ ____________________

e) $h'(x)g(x) =$ ____________________

f) $g'(x)h(x) - h'(x)g(x) =$ ____________________

g) $h^2(x) =$ ______________

h) $f'(x) =$

2) Obtener la derivada de la función $f(x)=\dfrac{\frac{4}{5}x^3-x^2}{x^2-4}$. Identifica $g(x)$ y $h(x)$

$g(x)$ =_______________ $h(x)$ =______________

Siguiendo el procedimiento para derivar el cociente de dos funciones

a) $g(x)=$ __________ ; $h(x)=$ __________

b) $g'(x)=$ ______________

c) $h'(x)=$ ______________

d) $g'(x)h(x)=$ ___________________

e) $h'(x)g(x)=$ ___________________

f) $g'(x)h(x)-h'(x)g(x)=$ ___________________

g) $h^2(x)=$ ______________

h) $f'(x)=$

Puntos problemáticos

Algunos alumnos en esta regla de derivación, omitiendo el signo de resta en el numerador, invierten el orden de los términos y llegan a resultados incorrectos, es necesario que el profesor este pendiente del procedimiento y resultados de los alumnos.

3) Obtener la derivada de la función$f(x)=\frac{x^2-8x}{x^4+3x^3}$. Identifica $g(x)$ y $h(x)$

$g(x)$ =_______________ $h(x)$ =______________

Siguiendo el procedimiento para derivar el cociente de dos funciones

a) $g(x)=$ __________ ; $h(x)=$ __________

b) $g'(x)=$ ______________

c) $h'(x)=$ ______________

d) $g'(x)h(x)=$ ___________________

e) $h'(x)g(x)=$ ___________________

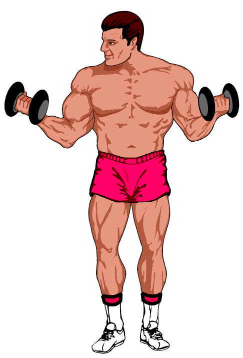
f) $g'(x)h(x)-h'(x)g(x)=$ ___________________

g) $h^2(x)=$ ______________

h) $f'(x) =$

Sugerencias para el profesor

Aunque es posible que la derivada de un cociente de funciones pueda ser obtenida mediante un producto de las mismas, se debe verificar que los alumnos no confundan los dos procedimientos para obtenerlas y estar pendiente de posibles errores algebraicos.



Ejercicios

Para cada una de las siguientes funciones, encuentra su derivada.

1. $f(x) = \dfrac{5x^8 - x^2}{4x^4 - 2}$
2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 - 2x}{8 + 6x^2}$
3. $f(x) = \dfrac{5x^{-2}}{(x^2 - 3x)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 - 2x}{\sqrt{6x^2 - 2x}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^4 - 4x^3 - 2x}{6x^2}$
6. $f(x) = \dfrac{\frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2}{x^2 - \frac{3}{8}}$