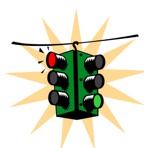
Sugerencias al Profesor.

La siguiente es una manera que te sugerimos llevar a cabo para iniciar el desarrollo de la Unidad. Después de señalar algunos conceptos clave, se presentan unos ejemplos desde el 2.1 hasta el 2.6.

RAZÓN DE CAMBIO DE UNA FUNCIÓN



Conceptos clave

Para una función que depende de una variable, la razón de cambio de esa función se obtiene al dividir la diferencia entre dos valores de la función correspondientes a dos valores de su variable independiente y la diferencia entre esos valores de la variable. Los valores de la variable no necesariamente son consecutivos. Si los valores de la variable son muy cercanos nos aproximaremos a la razón de cambio instantánea, de otra manera hablaremos de la razón de cambio promedio.

Función lineal

Consideremos cuatro ejemplos dirigidos a los alumnos con el fin de conocer la razón de cambio entre dos variables relacionadas mediante una función lineal

Ejemplo 2.1

Problema de conversión de temperaturas

Karla es una chica que gusta de ayudar a su mamá en preparar pasteles o guisados. Debe introducir al horno un lomo de cerdo que guardó en el refrigerador a 3° C. La receta le recomienda que el platillo estará listo cuando alcance una temperatura de 250° F. Ella solo dispone de un termómetro en grados centígrados ¿cómo sabrá en qué momento estará listo el platillo?

Solución:

Necesitamos recordar cómo convertir grados centígrados a Fahrenheit. Recuerda que la relación es $^{\circ}F = \frac{9}{5}{}^{\circ}C + 32$. En este caso el valor de los grados Fahrenheit depende de los grados centígrados.

Completa la tabla siguiente. En la primera columna anota valores de grados centígrados de 9 en 9, en la segunda columna los valores correspondientes a grados Fahrenheit, en la tercera columna la diferencia entre dos valores consecutivos de grados centígrados, en la cuarta columna la diferencia entre grados Fahrenheit y en una quinta columna el cociente de las dos anteriores cuyo encabezado será $\frac{^{\circ}F_2 - {}^{\circ}F_1}{^{\circ}C_2 - {}^{\circ}C_1}$

^{o}C	^{o}F	$^{\circ}C_2 - {}^{\circ}C_1$	$^{\circ}F_2 - {}^{\circ}F_1$	$\frac{^{\circ}F_2 - {}^{\circ}F_1}{^{\circ}C_2 - {}^{\circ}C_1}$
3	37.4			
12	53.6			
21				
30				
39				
48	118.4			
57	134.6			
66				
75				
84				
93				
102				
111				
120				
129	264.2			

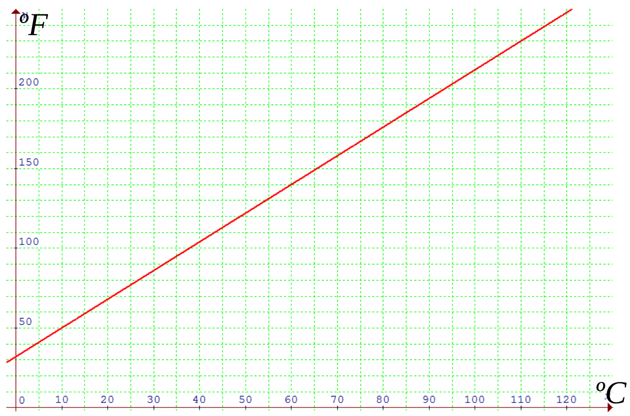
Tabla 1

Observarás en la tabla que conforme aumentamos 9ºC a la temperatura, la correspondiente a grados Fahrenheit aumenta 16.2º y este aumento es constante. En particular si en la expresión que relaciona los dos tipos de temperatura cambiamos ^oF por y y ^oC por x, la expresión se transforma en

$$y = \frac{9}{5}x + 32$$, la cual es de la forma $y = mx + b$

Esto nos dice que hay una relación lineal entre estos dos tipos de escalas para medir la temperatura.

Grafiquemos ahora las dos primeras columnas



Observamos que la gráfica corresponde efectivamente a una función lineal. Dando respuesta a la pregunta que formula el ejemplo, Karla sabrá que cuando la temperatura rebasa los 120º C ya estará listo el cocimiento del platillo.

Al calcular el cociente $\frac{^oF_2 - ^oF_1}{^oC_2 - ^oC_1}$ se obtiene el cociente de la diferencia entre dos valores de grados fahrenheit y la diferencia entre dos valores correspondientes de la variable *grados centígrados*. Este cociente lo podemos definir ***como la razón de cambio promedio de ºF con respecto a ºC.***

Ejemplo 2.2

Valor de depreciación de un auto

El papá de Carlos quiere comprar un auto nuevo y le interesa conocer cual marca se deprecia menos en un lapso de 5 años. Él investiga en una página web y obtiene como resultado que para cierto modelo y marca de vehículo si el auto nuevo cuesta \$ 165,000 a los 3 años su valor será \$ 112,143. ¿Con estos datos podrá dar respuesta a lo que busca y podrá comparar con otra marca?

Solución:

Supongamos que la depreciación del auto corresponde a una función lineal. Si el valor inicial es de $165,000 y a los tres años es de $ 112,143 con esta información podríamos escribir la relación entre el valor del auto $V(x)$ después de x años y el valor inicial de la manera siguiente: $V(x)=165-17.619x$

Utilizaremos las cantidades sin los miles para facilitar operaciones.

Es conveniente que los alumnos Investiguen cómo se obtuvo el valor -17.619

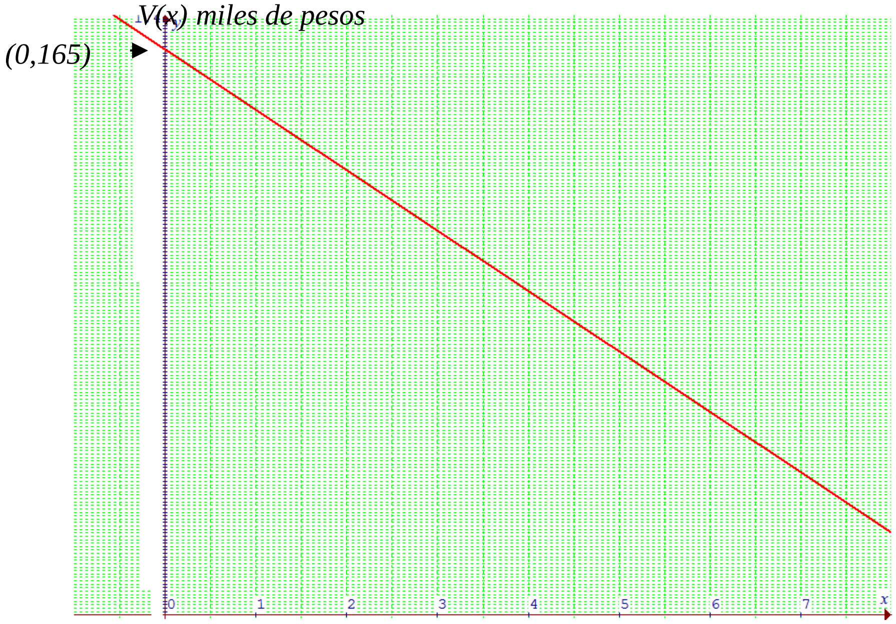
Completa la tabla que se muestra enseguida

x(años)	$V(x)$	x_2-x_1	$V(x_2)-V(x_1)$	$\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1}$
0	165			
1	147.381	1		
2	129.762	1		
3	112.143	1		
4	94.524	1		
5	76.905	1		
6	59.286	1		
7	41.667	1		

Tabla 2

El papá de Carlos ya podrá dar respuesta a lo que busca con los valores de esta tabla.

Si construimos la gráfica se verá así:



En la quinta columna obtuviste el valor -17.619 para cualquier año y éste corresponde a la pendiente de la recta. Observa que, como la pendiente es negativa la función es decreciente.

Al calcular el cociente $\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1}$ estamos comparando el cociente de la diferencia entre dos valores de la función y la diferencia entre dos valores correspondientes de la variable *x*. Este cociente lo podemos definir ***como la razón de cambio promedio del valor del auto $V(x)$ con respecto al tiempo x .***

Los valores que se dan en el siguiente problema pueden ser ajustados o actualizados.

Ejemplo 2.3

Problema del costo de un viaje

Al abordar un taxi el taxímetro marca $8.50 (de banderazo) y te cobran $ 0.75 por cada kilómetro recorrido. ¿Cuánto te costaría un recorrido de 15, 18, 22.6, 25, 32.8, 37 kilómetros?

Solución

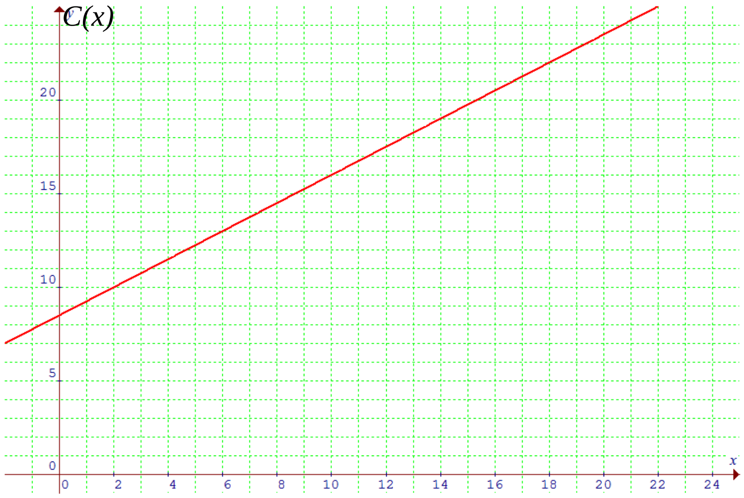
Escribe primero la función que relaciona el costo *C(x)* del viaje y la distancia recorrida *x.* $C(x) = 0.75x + 8.5$

Completa la siguiente tabla: en la primera columna anotarás diferentes valores de x (en este caso de 3 en 3), en la segunda columna los valores correspondientes a *C(x)*; en la tercera columna la diferencia entre dos valores consecutivos de x, con encabezado $x_2 - x_1$. En la cuarta columna anotarás la diferencia entre dos valores consecutivos de *C(x)*, con encabezado $C(x_2) - C(x_1)$; Y en la quinta columna calcularás el cociente de las dos anteriores y su encabezado será $\frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$

x	$C(x)$	$x_2 - x_1$	$C(x_2) - C(x_1)$	$\frac{C(x_2) - C(x_1)}{x_2 - x_1}$
3				
6				
9				
12				
15				
18				
21				
24				
27				

Tabla 3

Construye la gráfica de la función y responde ¿qué significado tiene en la gráfica el valor *C= 0.75* y el de *C= 8.50*?



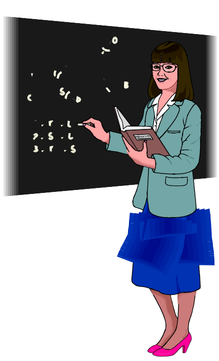
Habrás observado que en la última columna de la tabla 1 los valores resultaron iguales a 0.75

Puedes escribir en la tabla otros valores consecutivos de x y observarás que nuevamente la última columna resulta igual a 0.75.

El valor 0.75 corresponde precisamente a la pendiente de la recta y observarás en la gráfica que 8.5 corresponde a la **ordenada al origen** de la recta.

Los costos de los recorridos serán 95.625, 114.75, 144.075, 159.375, 209.1 y 235.875 respectivamente. Compruébalos

Al calcular el cociente $\dfrac{C(x_2)-C(x_1)}{x_2-x_1}$ estamos comparando el cociente de la diferencia entre dos valores de la función y la diferencia entre dos valores correspondientes de la variable x. Este cociente lo podemos definir ***como la razón de cambio promedio de $C(x)$ con respecto a x***

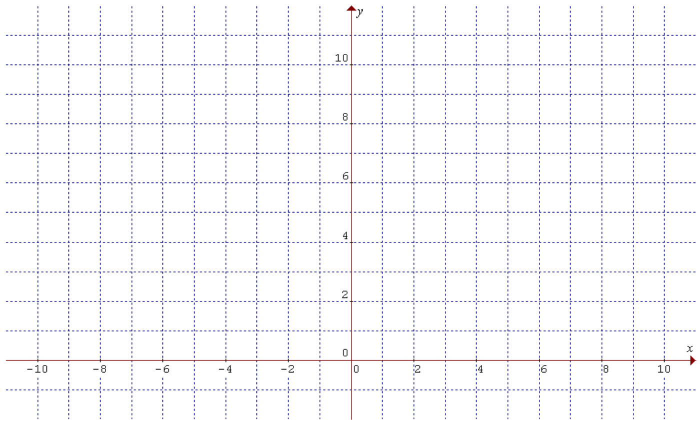


Ejemplo 2.4

Un punto (x,y) se mueve en el plano describiendo el lugar geométrico correspondiente a la función $f(x)=\dfrac{3x+16}{8}$. Obtén la razón de cambio de $f(x)$ al cambiar x. Elabora una tabla de valores para x desde -10 hasta 10, elige 11 valores y grafícala

x											
$y=f(x)$											

Tabla 4



Escribe ahora en forma vertical la tabla 4 y agrégale 3 columnas como en la tabla 1; en la primera anotarás la diferencia entre dos valores consecutivos de x, con encabezado $x_2 - x_1$. En la segunda anota la diferencia entre dos valores consecutivos de $f(x)$, con encabezado $f(x_2) - f(x_1)$; Y en la tercera columna calcularás el cociente de las dos anteriores y su encabezado será $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

x	$f(x)$	$x_2 - x_1$	$f(x_2) - f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Tabla 4

Observa nuevamente los resultados de esta tabla. ¿A qué valor corresponde la última columna?

Efectivamente, corresponde a la pendiente de la recta $3x-8y+16=0$

¿Estás de acuerdo? ____

Por otra parte, calcula el límite $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ para la función $f(x)=\frac{3x+16}{8}$

, donde sea necesario.

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\left(\frac{3x+16}{8}\right)-\left(\frac{3x_1+16}{}\right)}{x-x_1} = \lim_{x \to x_1} \frac{\frac{3x-3x_1}{}}{x-x_1} =$$

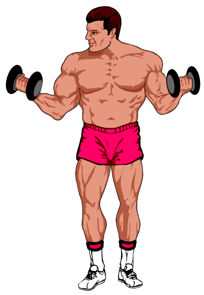
El valor de este límite es $\frac{3}{8}$ y corresponde a la pendiente de la recta.

¿Qué podrías concluir de los resultados anteriores?

Al calcular el cociente $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ estamos comparando el cociente de la diferencia entre dos valores de la función y la diferencia entre dos valores correspondientes de la variable *x*. Este cociente lo podemos definir ***como la razón de cambio promedio de f(x) con respecto a x***. Y podrás observar, tanto de la tabla como en la gráfica que ésta razón de cambio promedio es constante para cualquier intervalo de la función lineal.

En un punto particular de la gráfica ¿cuál sería la pendiente de la recta?

Efectivamente, esto significa que **la razón de cambio instantánea para este tipo de funciones coincide con la razón promedio de cambio.**



Ejercicio 2.1

Calcula el límite $\underset{x \to x_1}{lím} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ para las funciones siguientes, grafica cada una de ellas y verifica tus resultados.

1. $f(x) = 4x - 3$
2. $f(x) = \dfrac{-2x + 12}{3} = -\dfrac{2x}{3} + 4$
3. $f(x) = \dfrac{-5x + 9}{7}$