RELACIÓN ENTRE LA RAZÓN DE CAMBIO INSTANTÁNEA Y LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Razón de cambio instantánea y la derivada de una función

Retomemos nuevamente el problema del proyectil estudiado en la secuencia anterior

Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de 5 metros con una velocidad inicial de 17.5 $\frac{m}{seg}$. Entonces la función que describe su posición es: $s(t) = 12 + 17.5t - 4.9t^2$;

Siendo *s(t)* la altura o distancia recorrida al tiempo *t* segundos.

Consideramos en ese entonces que el cociente $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ da como resultado la velocidad promedio del proyectil en un cierto intervalo, pues estamos dividiendo la diferencia de distancias recorridas entre el tiempo transcurrido.

Analizaremos ahora el valor de este cociente en el intervalo entre 2 y 4 segundos pero aproximándonos cada vez más a los 3 segundos.

Nos aproximamos, en primer lugar desde el valor 2. Completa la tabla siguiente.

t	$s(t)$	$t_2 - t_1$	$s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
2	27.4			
2.1	27.141	0.1	-0.259	-2.59
2.4	25.776			
2.7	23.529			
2.9	21.541	0.2	-1.988	-9.94
2.91	21.43131			
2.94	21.09636			

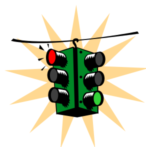
2.96	20.86816			
2.98	20.63604	0.02	-0.23212	-11.606
2.99	20.51851			
2.999	20.4118951			
2.9999	20.401189			
2.99999	20.400119	0.00009	-0.0001071	
2.999999	20.4000119	0.000009	-0.0001071	**-11.900000**

Ahora lo hacemos aproximándonos desde el valor 4

t	$s(t)$	$t_2 - t_1$	$s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
4	3.6			
3.9	5.721	-0.1	2.121	-21.21
3.7				
3.5	13.225			
3.3	16.389	-0.2	3.164	-15.82
3.1				
3.01				
3.001				
3.0001	20.398809			
3.00001				
3.000001	20.3999881			
3.0000001	20.3999988	0.0000009	0.00001071	**-11.9**

Recuerda que los valores de la última columna nos proporcionan la razón de cambio promedio del desplazamiento respecto al tiempo transcurrido.

Observamos además que al acercarnos a los 3 segundos, tanto a partir de 2 como de 4 segundos, el valor del cociente está aproximándose a -11.9, y podríamos decir que este valor corresponde a la razón de cambio instantánea del desplazamiento, respecto al tiempo. ***Esta es la velocidad instantánea del proyectil a los 3 segundos del punto de partida.***



Concepto clave

Definiremos ahora un nuevo concepto,

La derivada de la función *f(x)*, denotada por *f´(x)*, es aquella función cuyo valor en cualquier punto *a* de un intervalo está dado por

$$f´(a) = \underset{x\to a}{lím}\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ **, si este límite existe**

A este límite también se le conoce como "**límite de Fermat**"

Como ejemplo evaluemos $s´(3) = \underset{t\to 3}{lím}\frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$, recuerda que la función que describe su posición es $s(t) = 12 + 17.5t - 4.9t^2$

$$s´(3) = \underset{t\to 3}{lím}\frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \underset{t\to 3}{lím}\frac{(12 + 17.5t - 4.9t^2) - (12 + 17.5(3) - 4.9(9))}{t - 3} =$$

$$\underset{t\to 3}{lím}\frac{12 + 17.5t - 4.9t^2 - 12 - 17.5(3) + 4.9(9)}{t - 3} = \underset{t\to 3}{lím}\frac{17.5(t - 3) - 4.9(t^2 - 9)}{t - 3}$$

Dividimos por (t – 3)

$$s´(3) = \underset{t\to 3}{lím}\left(17.5 - 4.9(t + 3)\right) = 17.5 - 29.4 = -11.9$$

Hemos obtenido $s´(3) = -11.9$, la derivada de la función a los 3 segundos y además, ésta es la razón de cambio instantánea, que en nuestro ejemplo de desplazamiento corresponde a la velocidad instantánea del proyectil a los 3 segundos.

Y de la misma forma podríamos calcular la velocidad instantánea en cualquier otro punto del movimiento.

Por ejemplo a los 1.5 segundos:

$$s'(1.5) = \lim_{t\to 1.5} \frac{s(t)-s(1.5)}{t-1.5} = \lim_{t\to 1.5} \frac{(12+17.5t-4.9t^2)-(12+17.5(1.5)-4.9(1.5^2))}{t-1.5} =$$

$$\lim_{t\to 1.5} \frac{17.5(t-1.5)-4.9(t^2-2.25)}{t-1.5} = \lim_{t\to 1.5}\left(17.5-4.9(t+1.5)\right) = 2.8$$

¿Qué significado tiene el que una velocidad sea negativa?

Ahora veamos lo siguiente, pon mucha atención.

En las sesiones anteriores hemos utilizado un límite en particular $\lim_{x\to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$. Observa que corresponde a la derivada de la función en el punto donde $x = x_1$

Para el problema del proyectil que ya hemos retomado, el valor de este límite fue $\lim_{t\to t_1} \frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1} = 17.5-9.8t_1$ y como recordarás, lo llamamos $v(t)$.

Pues bien, qué obtenemos si evaluamos este límite en $t = 3$

$v(t) = 17.5-9.8(3) =$

¡Exacto!, estamos obteniendo -11.9 que es el valor que nos proporcionó la tabla y la derivada.

Y para $t = 1.5$ segundos, $v(1.5) = s'(1.5) = 17.5-9.8(1.5) = 2.8$

Esto significa que podríamos evaluar el límite $f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ cada vez para un valor en particular de a y obtenemos la derivada en ese punto, o bien lo evaluamos en general y sustituimos en este resultado el valor de la variable que estemos considerando

De esta manera tenemos dos aspectos sobre los que hay que reflexionar:

Uno es la definición de la derivada, que es la obtención de un límite, y el otro, la interpretación de la derivada como la razón de cambio instantánea.

En particular, ***si el problema es de movimiento y tenemos la función de desplazamiento, la derivada nos proporciona la velocidad instantánea del proyectil en un instante del desplazamiento.***

Interpretación geométrica de la derivada

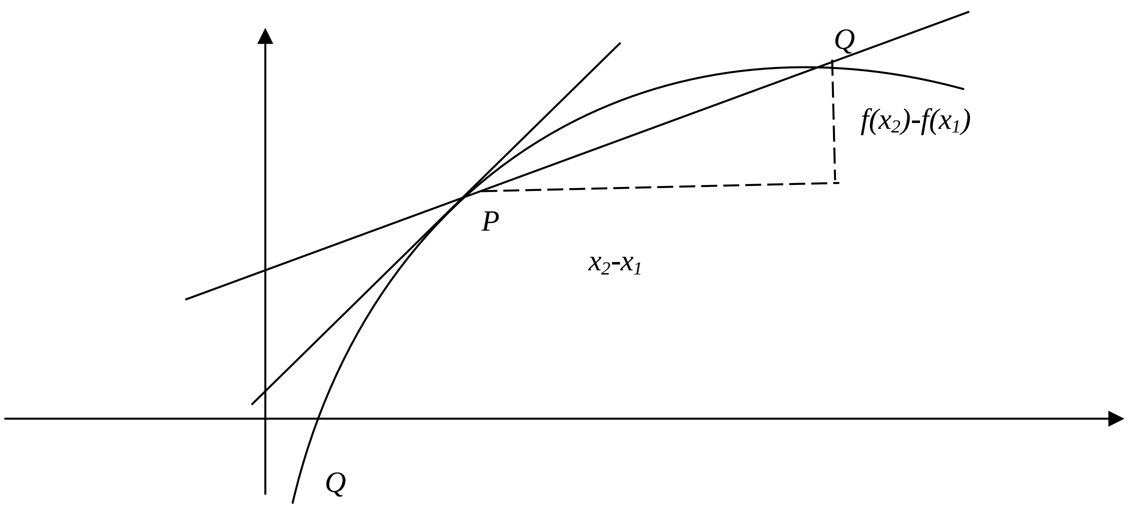
En la parte anterior hablamos de la recta secante a una curva, refiriéndonos a ella como la recta que pasa por dos puntos de la curva.

Recordémoslo nuevamente.

Consideramos una función $f(x)$ que es continua en un punto x_1

Esta función $f(x)$ está definida en un intervalo abierto y los puntos P y Q están en ese intervalo, P tiene coordenadas $P(x_1, f(x_1))$ y las coordenadas de Q son $Q(x_2, f(x_2))$. Se considera que P y Q son puntos muy cercanos.

Considera que el punto P es fijo y el punto Q podría estar a la derecha o a la izquierda de P



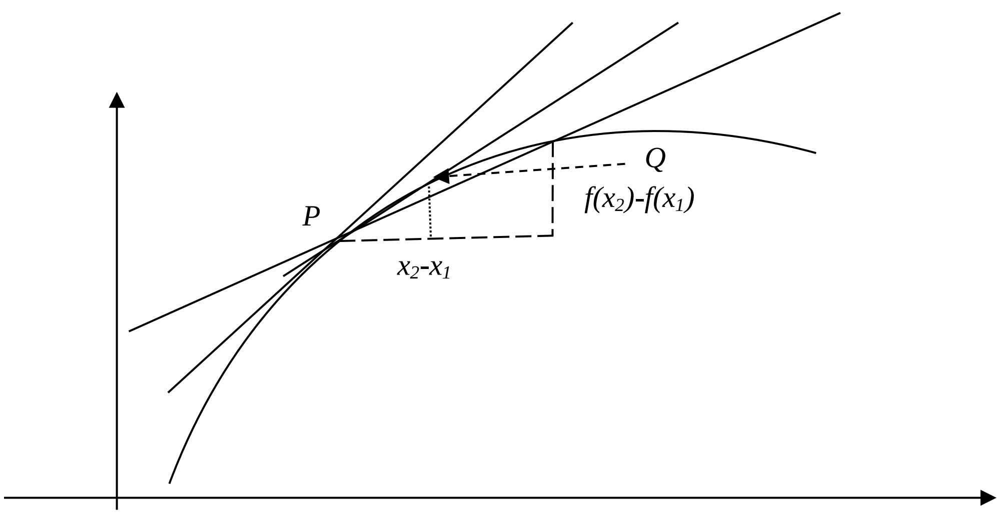
Cualquier recta que pase por P y Q es una secante a la curva.

Como los puntos tienen coordenadas $P(x_1, f(x_1))$ y $Q(x_2, f(x_2))$

La pendiente de la recta secante es $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Este cociente proporciona un promedio de los valores de las pendientes de las rectas secantes trazadas entre P y Q.

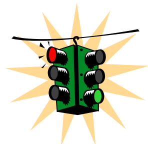
¿Qué sucedería si esta secante se hace girar de modo que el punto Q esté cada vez más cerca del punto P, manteniendo fijo a éste último punto?



De las gráficas podemos observar que la diferencia $x_2 - x_1$ se hace cada vez más pequeña, es decir x_2 tiende a x_1. Si continuamos este proceso, ***en el límite la recta secante se convierte en la recta tangente a la curva***.

Por consiguiente, el $\lim\limits_{x_2 \to x_1} \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ nos proporciona el valor de ***la pendiente de la tangente a la curva en el punto P***.

Observamos que de hecho este límite corresponde a la derivada de la función en un punto, por lo que podemos generalizar:



Concepto clave

Geométricamente la derivada en un punto corresponde a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

Por ejemplo, si tenemos la función $f(x) = -6x^2 - 8x + 5$ y calculamos la derivada en el punto $x = 3.2$.

$$f´(3.2) = \underset{x \to 3.2}{lím} \frac{(-6x^2 - 8x + 5) - (-6(3.2^2) - 8(3.2) + 5)}{x - 3.2} = \underset{x \to 3.2}{lím} \frac{-6(x^2 - 10.24) - 8(x - 3.2)}{x - 3.2} =$$

$$\underset{x \to 3.2}{lím} \left(-6(x + 3.2) - 8\right) = -34.8 - 8 = -46.4$$

Entonces, la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = -6x^2 - 8x + 5$ en el punto $x = 3.2$ es -46.4

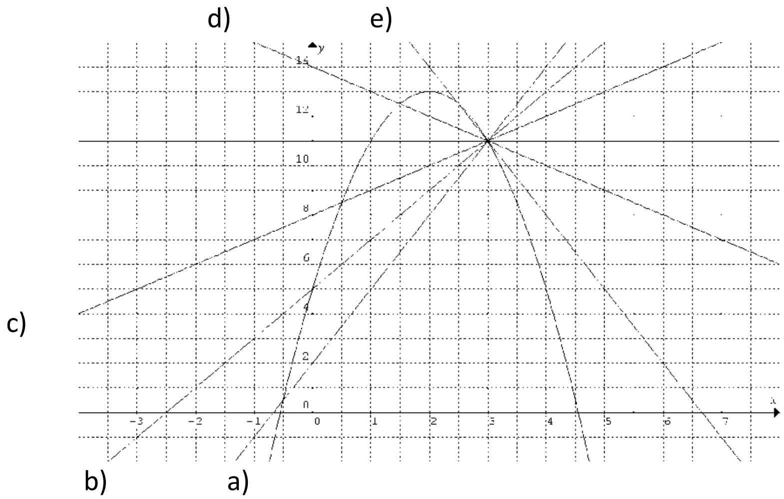
Este último valor también lo podemos utilizar para conocer el ángulo de inclinación de la tangente a la curva en $x = 3.2$

$\tan^{-1}(-46.4) = -1.5492479\ rad$, o bien, será 91º 14´5´´ en grados

Por otra parte, en el ejemplo 2.6 que resolvimos antes, obtuvimos, en el primer inciso la pendiente promedio de la secante a la curva $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$ ***entre los puntos (-0.5, 0.5) y (3, 11), que resultó ser igual a 3.***

Si mantenemos como fijo el punto (3,11) y hacemos girar la secante de modo que estemos cada vez más cerca del este punto, obtendremos la pendiente de la tangente a la curva en (3, 11).

En la gráfica siguiente se muestra el desplazamiento de la secante tomando el punto (3, 11) como punto fijo.



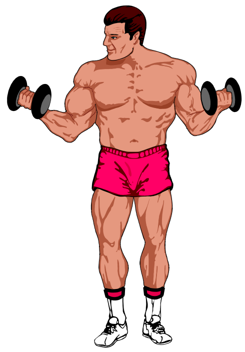
Obtengamos la pendiente de la tangente a la curva en el punto (3, 11)

$$f´(3) = \lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(-2x^2 + 8x + 5) - (-2(3)^2 + 8(3) + 5)}{x - 3}$$

$$f´(3) = \lim_{x \to 3} \frac{-2x^2 + 8x + 5 - (-18 + 24 + 5)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{-2(x^2 - 9) + 8(x - 3)}{x - 3}$$

$$f´(3) = \lim_{x \to 3} \frac{-2(x + 3)(x - 3) + 8(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \left(-2(x + 3) + 8\right) = -12 + 8 = -4$$

Por lo tanto, la pendiente de la tangente a la curva $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$ en el punto (3, 11) es igual a -4



Ejercicio 2.2

Utilizando el límite $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ calcula la pendiente de las siguientes funciones en el punto que se indica.

1. $f(x) = -2x + 9, x = -3$
2. $f(x) = -\frac{3x+7}{4},\ x = \frac{1}{3}$
3. $f(x) = -3x^2 - 5x + 2,\ x = -3$
4. $f(x) = 8 - 4x^2,\ x = -\frac{3}{8}$
5. $f(x) = -6x^2 + 9x - 11,\ x = -1.5$