Razón de cambio de una función cuadrática

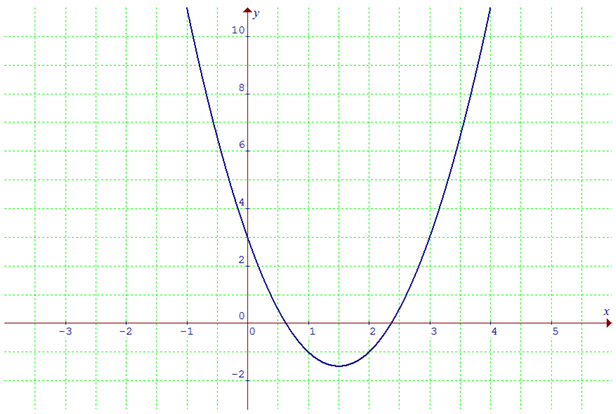
Ejemplo 2.5

Un punto se desplaza en el plano describiendo el lugar geométrico correspondiente a la función $f(x)=2x^2-6x+3$. Obtén la razón promedio de cambio. Considera 10 valores entre -2 y 4, pueden ser consecutivos o no. Completa la tabla

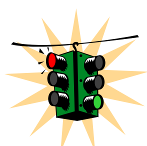
x	$f(x)$	$x_2 - x_1$	$f(x_2)-f(x_1)$	$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
-1.5	16.5			
-1	11	-0.5		-11
-0.5	6.5			-9
0	3			
0.5	0.5			-5
1	-1			-3
1.5	-1.5			-1
2	-1			
2.5	0.5			
3	3			5
3.5	6.5			7
4	11			9

Como podrás observar, los valores de la última columna no son iguales ¿a qué se debe esto, si para una función lineal sí resultaron iguales?

Observa la gráfica siguiente que corresponde a esta función cuadrática



Para dar respuesta a la pregunta anterior necesitamos considerar un concepto ya conocido por ti, la Secante a una curva.



Concepto clave

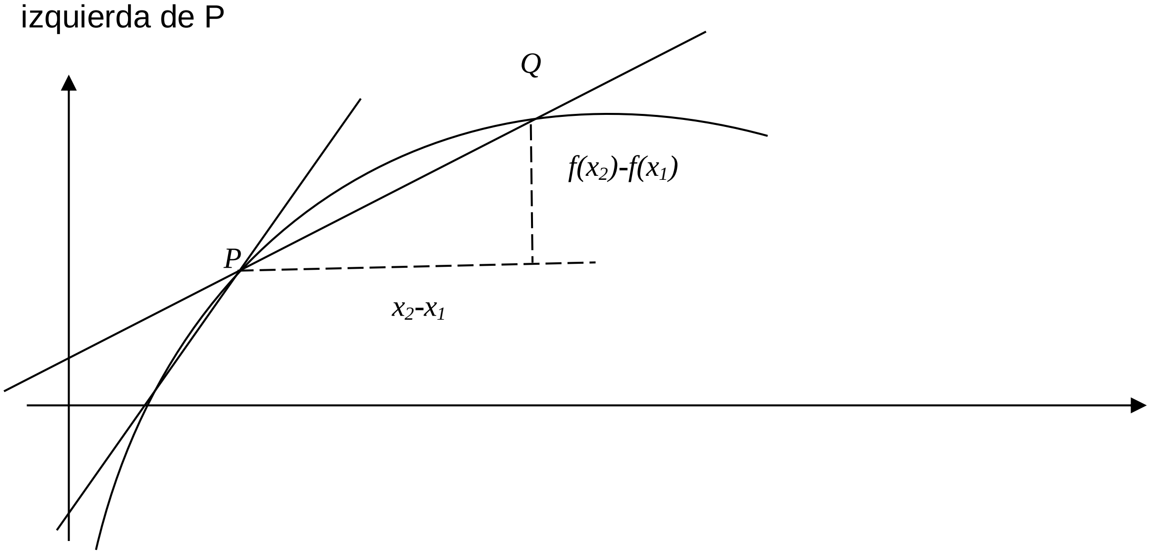
Recta Secante

La secante a una curva es la recta que pasa por dos puntos de ella.

Considera una función $f(x)$ que es continua en un punto x_1

Considera también que esta función $f(x)$ está definida en un intervalo abierto y que los puntos P y Q están en ese intervalo, P tiene coordenadas $P(x_1, f(x_1))$ y las coordenadas de Q son $Q(x_2, f(x_2))$. P y Q son puntos muy cercanos.

Considera que el punto P es fijo y el punto Q podría estar a la derecha o a la izquierda de P



Cualquier recta que pase por P y Q es una secante a la curva.

Como los puntos tienen coordenadas $P(x_1, f(x_1)) \;\; y \;\; Q(x_2, f(x_2))$

La pendiente de la recta secante es $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

Este cociente proporciona un **promedio** de los valores de las pendientes de las secantes trazadas entre P y Q. Se puede considerar como **la razón de cambio promedio de la pendiente de la secante** entre dos puntos de la curva.

Ejemplo 2.6.

Para la función $f(x)=-2x^2+8x+5$, obtén la pendiente promedio de la secante entre los siguientes pares de puntos:

a) $x=-0.5 \; y \; x=3$

b) $x=1.5 \, y \; x=4$

Para el inciso a)

x	$f(x)$	x_2-x_1	$f(x_2)-f(x_1)$	$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
-0.5	0.5			
3	11	3.5	10.5	$\dfrac{10.5}{3.5}=3$

La pendiente promedio de la secante entre los puntos (-0.5, 0.5) y (3, 11) es igual a 3

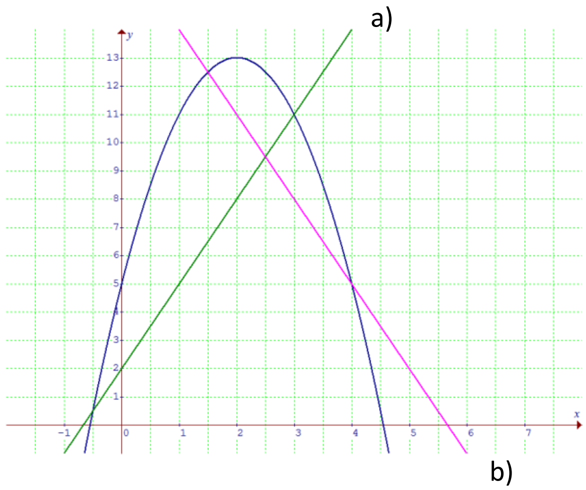
Para el inciso b)

x	$f(x)$	x_2-x_1	$f(x_2)-f(x_1)$	$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
1.5	12.5			

La pendiente promedio de la secante entre los puntos (1.5, 12.5) y (4,5) es igual a -3

4	5	2.5	-7.5	$\frac{-7.5}{2.5}=-3$

En la siguiente figura se muestran tanto la gráfica de la función como las dos secantes



¿Qué sucedería si alguna de estas secantes secante se hace girar manteniendo fijo uno de sus puntos?

Más adelante daremos respuesta a esta pregunta, por ahora estudiemos el siguiente problema.

El siguiente problema está escrito como secuencia didáctica, te sugerimos abordarlo con los alumnos incluyendo todos los pasos, solicitando a los alumnos te entreguen un reporte de la solución.

Ejemplo 2.7

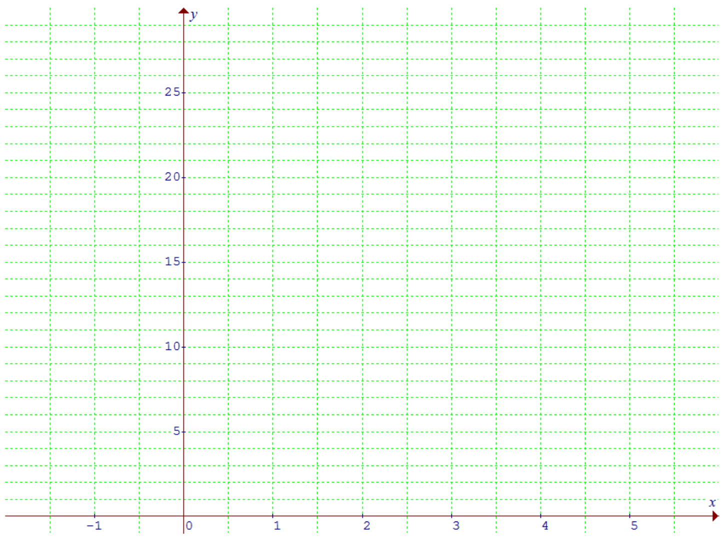
Problema del proyectil

Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba desde una altura de 10 metros con una velocidad inicial de 17.5 $\frac{m}{seg}$. Entonces la función que describe su posición es: $s(t)=12+17.5t-4.9t^2$; Siendo *s(t)* la altura o distancia recorrida al tiempo *t* segundos. Calcula en qué momento alcanza el proyectil la mayor altura y en qué instante tocará el suelo.

1. Construye una tabla en la que el primer renglón corresponda a diferentes valores de tiempo como 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, hasta 6 segundos y en el segundo renglón calcula los valores de *s(t)*.

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
$s(t)$													

2. Ahora traza la gráfica de *s(t)*



3. ¿Qué tipo de gráfica obtuviste?

4. ¿En qué instante alcanza el proyectil la máxima altura?

5. Si el proyectil pudiera llegar hasta el nivel del piso, ¿cuánto tiempo tarda en llegar?

6. Escribe ahora la tabla en forma vertical y agrégale tres nuevas columnas:

a) En la tercera obtendrás la diferencia entre dos tiempos consecutivos, cuyo encabezado es $t_2 - t_1$

b) En la cuarta columna calcula la diferencia entre dos alturas o distancias consecutivas de la tabla, $s(t_2) - s(t_1)$

c) Y en la quinta columna , obtén el cociente $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

t	$s(t)$	$t_2 - t_1$	$s(t_2) - s(t_1)$	$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$
0				
0.5				
1				
1.5				
2				
2.5				
3				
3.5				
4				
4.5				
5				
5.5				
6				

Observa que en la columna correspondiente a $\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$ los resultados no son iguales.

¿Estás de acuerdo?____

7. ¿Cómo interpretas ahora a los valores encontrados en la última columna de la Tabla?

8. ¿Qué podrías deducir de los valores obtenidos en esta última columna?

Considera que estamos dividiendo la diferencia de alturas o distancias recorridas entre la diferencia de tiempo transcurrido. Dicho de otra forma, la distancia recorrida entre el tiempo transcurrido.

¿Cómo se interpreta esto en un problema de movimiento?

Por ejemplo, la razón de cambio promedio entre 1 y 1.5 segundos sería

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{s(1.5)-s(1)}{1.5-1}=\frac{27.225-24.6}{0.5}=5.25$$

como la tenías calculada en la tabla; pero entre 3.5 y 4 segundos sería:

$$\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}=\frac{s(4)-s(3)}{4-3.5}=\frac{3.6-13.225}{0.5}=-19.25$$

9. Calcula ahora el siguiente límite:

$$\lim_{t\to t_1}\frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1}$$ llámalo $v(t_1)$

$$\lim_{t\to t_1}\frac{(12+17.5t-4.9t^2)-(12+17.5t_1-4.9t_1^{\,2})}{t-t_1}=\lim_{t\to t_1}\text{-----------------}=$$

$$\lim_{t\to t_1}\frac{17.5(t-t_1)-4.9(t^2-t_1^{\,2})}{t-t_1}=$$

Anota aquí el valor del límite que obtuviste_____________________________

10. Este último resultado podemos evaluarlo para diferentes valores de *t*.

Por ejemplo al tiempo *t* = 1.5 será igual a $v(1.5)=17.5-9.8(1.5)=2.8$ y al tiempo

t = 3 será igual a $v(3)=17.5-9.8(3)=-11.9$

11. ¿Qué consideras que se está obteniendo al evaluar $v(t)$?

¿Qué significado tiene esto en un problema de movimiento?

Hagamos un resumen antes de continuar.

Para una función lineal, obtuvimos una razón de cambio promedio constante y al observar la gráfica y obtener el $\lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ obtuvimos el mismo valor.

Interpretamos lo anterior como la pendiente de la recta que corresponde a la función lineal.

En el problema del proyectil, que corresponde a una función cuadrática, el cociente $\frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$ nos proporciona la razón de cambio promedio del desplazamiento del proyectil con respecto al tiempo y esto lo podemos interpretar como ***la velocidad promedio*** entre los puntos t_2 y t_1.

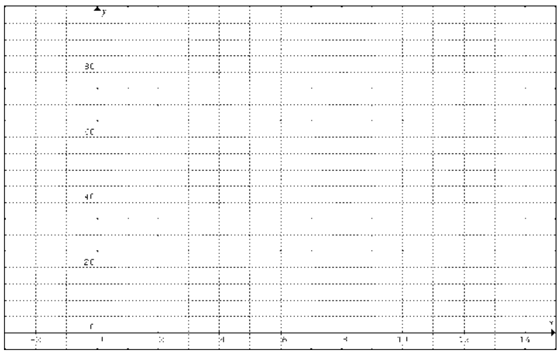
Al calcular el límite $\lim\limits_{t \to t_1} \frac{s(t)-s(t_1)}{t-t_1}$ y evaluarlo en un punto estamos obteniendo la razón de cambio instantánea en un punto, que para nuestro ejemplo será ***la velocidad instantánea***.

12. Agrega ahora a la tabla la columna $v(t)$, o si ya no dispones de espacio, inicia una nueva tabla con las columnas *t* y *v(t)*, recuerda $v(t)=17.5-9.8t$

t	$v(t)$
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
3.5	
4	

4.5	
5	
5.5	
6	

13. Elabora la gráfica de $v(t)$



14. Ahora agrega a la tabla las columnas $t_2 - t_1, v(t_2) - v(t_1)$ y $\dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

t	$v(t)$	$t_2 - t_1$	$v(t_2) - v(t_1)$	$\dfrac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				

11				
12				
13				

Observa los valores de la última columna

15. ¿Qué consideras que has obtenido en ella?

Expresa en tus propias palabras lo que consideres que es el significado de los valores obtenidos en la última columna

Calcula ahora el límite siguiente $\lim_{t \to t_1} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1}$ e interpreta el resultado.