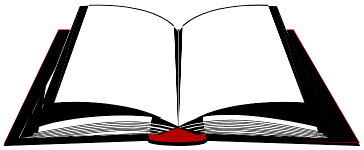
Regla de los cuatro pasos



La derivada de una función también se puede obtener como el límite del cociente de incrementos, conocido como la regla de los cuatro pasos.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El procedimiento en este caso consiste en los pasos siguientes:

1. Se da un incremento, Δx a la variable independiente x
2. Se obtiene el incremento correspondiente a la función $f(x+\Delta x) - f(x)$
3. Se obtiene el cociente de los incrementos $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
4. Se calcula el límite del cociente de incrementos $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

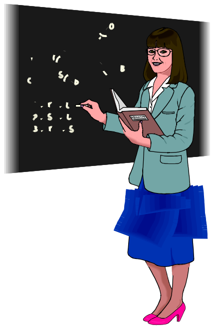
   y esto proporciona la derivada de $f(x)$

En la aplicación de esta regla, además de las operaciones de factorización que ya recordamos, será necesario utilizar el desarrollo de binomios como:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \text{ ,etc}$$

Y también recordar cómo racionalizar el numerador o denominador de una fracción.

Veamos otros ejemplos para obtener la derivada de una función, aplicando esta definición de la regla de los cuatro pasos.



Ejemplo 2.14 Obtén la derivada de la función $f(x) = -5x + 10$

Solución

1. Damos un incremento Δx a x,
2. Obtenemos el incremento de la función
$f(x+\Delta x) - f(x) = -5(x+\Delta x) - (-5x) = -5x - 5\Delta x + 5x = -5\Delta x$
3. Obtenemos el cociente de incrementos $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{-5\Delta x}{\Delta x} = -5$ y
4. aplicamos el límite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (-6) = -6$

Por lo tanto, $f'(x) = -6$

Ejemplo 2.15 Obtén la derivada de $f(x) = 5x^2 - 13x + 3$

Solución

1. Damos un incremento a x y obtenemos el incremento correspondiente a $f(x)$

2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 5(x+\Delta x)^2 - 13(x+\Delta x) + 3 - 5x^2 + 13x - 3$

Obtenemos el cociente de incrementos

1. $\dfrac{5(x+\Delta x)^2 - 13(x+\Delta x) + 3 - (5x^2 - 13x + 3)}{\Delta x}$

Desarrollamos el binomio al cuadrado y eliminamos paréntesis

$$=\frac{5(x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x)-13x-13\Delta x+3-5x^2+13x-3}{\Delta x}$$

Simplificamos el $13x$ y el -3

$$=\frac{5x^2+10x\Delta x+5\Delta^2 x-13\Delta x-5x^2}{\Delta x}=\frac{10x\Delta x+5\Delta^2 x-13\Delta x}{\Delta x}=10x+5\Delta x-13$$

2. Calculamos el límite de la expresión anterior, para obtener la derivada

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[10x+5\Delta x-13]}{\Delta x}=10x-13$$

Por lo tanto, $f'(x)=10x-13$

Ejemplo 2.16 Obtén la derivada de $f(x)=2x^3-6x^2-7x+11$

Solución

1. Damos inicialmente un incremento a x y obtenemos el incremento correspondiente a *f(x)*

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=2(x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+11-(2x^3-6x^2-7x+11)$

Obtenemos el cociente de incrementos

3. $$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{2(x+\Delta x)^3-6(x+\Delta x)^2-7(x+\Delta x)+11-(2x^3-6x^2-7x+11)}{\Delta x}$$

Desarrollamos los binomios

$$=\frac{2(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta^2 x+\Delta^3 x)-6(x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x)-7x-7\Delta x+11-2x^3+6x^2+7x-11}{\Delta x}$$

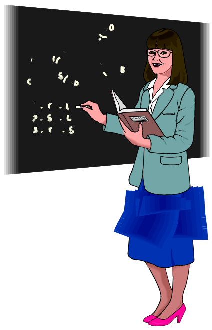
simplificamos términos semejantes

$$=\frac{6x^2\Delta x+6x\Delta^2 x+2\Delta^3 x-12x\Delta x-6\Delta^2 x-7\Delta x}{\Delta x}$$

Dividimos todos los términos entre Δx y aplicamos el límite

4. $\lim_{\Delta x\to 0}\left[6x^2+6x\Delta x+2\Delta^2 x-12x-6\Delta x-7\right]=6x^2-12x-7$

Finalmente, la derivada de $f(x)=2x^3-6x^2-7x+11$es $f´(x)=6x^2-12x-7$



Ejemplo 2.17 Obtén la derivada de $f(x)=\frac{11}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3$

Solución

1. Calculamos el incremento de $f(x)$ al incrementar la variable x
2. $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{11}{4}(x+\Delta x)^4+7(x+\Delta x)^3-\left(\frac{11}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3\right)$
3. Obtenemos ahora el cociente de incrementos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\frac{11}{4}(x+\Delta x)^4+\frac{7}{3}(x+\Delta x)^3-\left(\frac{11}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3\right)}{\Delta x}$$

Desarrollamos los binomios a la cuarta y al cubo para después simplificar términos semejantes

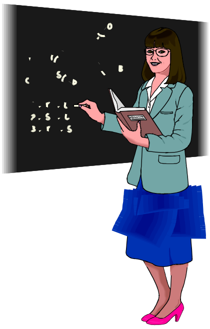
$$=\frac{\frac{11}{4}(x^4+4x^3\Delta x+6x^2\Delta^2x+4x\Delta^3x+\Delta^4x)+\frac{7}{3}(x^3+3x^2\Delta x+3x\Delta^2x+\Delta^3x)-\left(\frac{11}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3\right)}{\Delta x}$$

$$=\frac{11x^3\Delta x+\frac{66}{4}x^2\Delta^2x+11x\Delta^3x+\frac{11}{4}\Delta^4x+7x^2\Delta x+7x\Delta^2x+\frac{7}{3}\Delta^3x}{\Delta x}$$

Ahora dividimos cada término entre Δx y aplicamos el límite

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(11x^3+\frac{33}{2}x^2\Delta x+11x\Delta^2x+\frac{11}{4}\Delta^3x+7x^2+7x\Delta x+\frac{7}{3}\Delta^2x\right)=11x^3+7x^2$

Por consiguiente, la derivada de $f(x)=\frac{11}{4}x^4+\frac{7}{3}x^3$ es $f´(x)=11x^3+7x^2$



Ejemplo 2.18 Obtén la derivada de $f(x) = 11 - 2x^2 - 6x^5$

Solución

1. Nuevamente, iniciamos obteniendo el incremento de la función, al incrementar a la variable x
2. $f(x+\Delta x) - f(x) = 11 - 2(x+\Delta x)^2 - 6(x+\Delta x)^5 - (11 - 2x^2 - 6x^5)$
3. Obtenemos ahora el cociente de los incrementos

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{11 - 2(x+\Delta x)^2 - 6(x+\Delta x)^5 - (11 - 2x^2 - 6x^5)}{\Delta x} =$$

Desarrollamos los binomios

$$\frac{11 - 2(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) - 6(x^5 + 5x^4\Delta x + 10x^3\Delta^2 x + 10x^2\Delta^3 x + 5x\Delta^4 x + \Delta^5 x) - 11 + 2x^2 + 6x^5}{\Delta x}$$

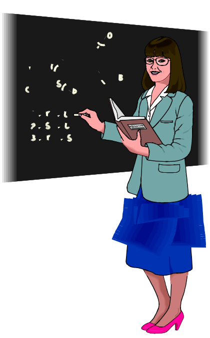
Eliminamos paréntesis y simplificamos términos semejantes

$$\frac{-4x\Delta x - 2\Delta^2 x - 30x^4\Delta x - 60x^3\Delta^2 x - 60x^2\Delta^3 x - 30x\Delta^4 x - 6\Delta^5 x}{\Delta x}$$

Dividimos por Δx y aplicamos el límite

4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-4x - 2\Delta x - 30x^4 - 60x^3\Delta x - 60x^2\Delta^2 x - 30x\Delta^3 x - 6\Delta^4 x \right) = -4x - 30x^4$

Por lo tanto, la derivada de $f(x) = 11 - 2x^2 - 6x^5$ es $f'(x) = -4x - 30x^4$



Ejemplo 2.19 Obtén la derivada de $f(x) = -3\sqrt{x}$

Solución

1.Obtenemos el incremento de *f(x)* al incrementar *x*

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=-3\sqrt{x+\Delta x}-(-3\sqrt{x})$

3. Obtenemos ahora el cociente de los incrementos

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{-3\sqrt{x+\Delta x}+3\sqrt{x}}{\Delta x}$$

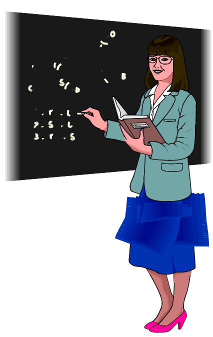
Multiplicaremos, tanto numerador y denominador, por el binomio conjugado del numerador para racionalizar éste

$$\frac{-3\sqrt{x+\Delta x}+3\sqrt{x}}{\Delta x}\frac{-3\sqrt{x+\Delta x}-3\sqrt{x}}{-3\sqrt{x+\Delta x}-3\sqrt{x}}=\frac{9(x+\Delta x)-9x}{\Delta x(-3\sqrt{x+\Delta x}-3\sqrt{x})}=\frac{9x+9\Delta x-9x}{\Delta x(-3\sqrt{x+\Delta x}-3\sqrt{x})}=$$

Simplificamos y aplicamos el límite

4. $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{9}{-3\sqrt{x+\Delta x}-3\sqrt{x}}=-\frac{9}{6\sqrt{x}}=-\frac{3}{2\sqrt{x}}$

Por consiguiente, la derivada de $f(x)=-3\sqrt{x}$ es $f'(x)=-\frac{3}{2\sqrt{x}}$



Ejemplo 2.20 Obtén la derivada de la función

$$f(x)=\frac{x}{x^2-8x}$$

Solución

1. Incrementamos *x* y obtenemos el incremento de $f(x)$

2. $f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{(x+\Delta x)}{(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)}-\frac{x}{x^2-8x}$

Debemos obtener el denominador común al sumar las fracciones

$$\frac{(x+\Delta x)(x^2-8x)-x\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right]}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}=\frac{(x+\Delta x)(x^2-8x)-x\left[x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-8x-8\Delta x\right]}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}=$$

Desarrollando los productos en el numerador, se obtiene

$$\frac{x^3-8x^2+x^2\cdot\Delta x-8x\cdot\Delta x-x^3-2x^2\cdot\Delta x-x(\Delta x)^2+8x^2+8x\Delta x}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}=$$

Simplificamos términos semejantes en el numerador, tendremos

$$\frac{-x^2\cdot\Delta x-x(\Delta x)^2}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}$$

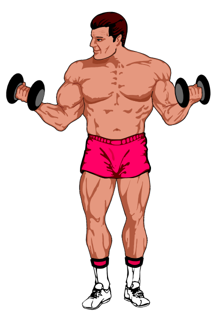
3. Ahora obtenemos el cociente de los incrementos y simplificamos Δx

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\dfrac{-x^2\cdot\Delta x-x(\Delta x)^2}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}}{\Delta x}=\frac{-x^2-x\cdot\Delta x}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}$$

4. Calculamos el límite cuando Δx tiende a cero de éste último cociente

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x^2-x\cdot\Delta x}{\left[(x+\Delta x)^2-8(x+\Delta x)\right](x^2-8x)}=\frac{-x^2}{(x^2-8x)(x^2-8x)}=\frac{-x^2}{(x^2-8x)^2}$$

Y éste último resultado es la derivada de la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-8x}$



Ejercicio 2.4

Obtén la derivada de las siguientes funciones utilizando ya sea el límite de Fermat o la regla de los cuatro pasos y después calcula la pendiente de la tangente a la curva en el punto que se indica

1. $f(x)=2x^3-6x^2, \text{en } x=-2$
2. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x-4, \text{en } x=3$
3. $f(x)=-x^3+6x^2, \text{en } x=1$
4. $f(x)=x^4-4x^3, \text{en } x=4$
5. $f(x)=-4\sqrt{7x-12}, \text{en } x=3$
6. $f(x)=\dfrac{5}{3x-4}, en\ x=2$