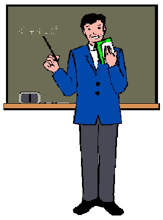
LAS SUCESIONES Y SU TENDENCIA AL INFINITO



Sugerencias al Profesor:

Resaltar que las sucesiones geométricas infinitas son objetos matemáticos que permiten modelar algunos procesos infinitos, y que a la vez su construcción involucra un proceso infinito. De tal manera que no se espera realizar un estudio profundo de las sucesiones sino hacer uso de ellas para representar numéricamente a los procesos infinitos y analizar su tendencia en el infinito. Para hacer el análisis de la tendencia mencionada, pedir de antemano a los alumnos que carguen con una calculadora científica que tenga opción para evaluar fórmulas (tecla CALC), proponiendo consecutivamente como valores para la evaluación, por ejemplo los de la sucesión 9, 99, 999, 9999, 99999, hasta el número de nueves permitidos por la calculadora, como una interpretación de que el número de veces que se repite el proceso se vuelve infinito.

Propósitos:

1. Introducir en general el concepto de sucesión y en particular el de sucesión geométrica.
2. Determinar el término general de una sucesión geométrica.
3. Obtener la función relacionada a una sucesión geométrica.
4. Inspeccionar la tendencia de una sucesión cuando n se vuelve infinita.

EL PROBLEMA DE LA CARRERA (PARTE 2)

Encontrar respuesta a la interrogante, ¿cuándo $\frac{1}{2^n}=0$?

Que fue planteada al cierre de la secuencia didáctica anterior.

Retomar las distancias consecutivas que separa a Pedro de Juan en el problema de la carrera expuesto en la secuencia didáctica anterior, para formar con ellas el siguiente conjunto términos:

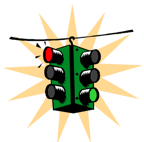
$$\frac{\overline{AB}}{2},\ \frac{\overline{AB}}{4},\ \frac{\overline{AB}}{8},\ \frac{\overline{AB}}{16},\ \frac{\overline{AB}}{32},\ \ldots,\frac{\overline{AB}}{2^n},\ \ldots,\quad n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

No se pierde generalidad, si se supone en lo que sigue que $\overline{AB}=1$, así que el conjunto de términos anterior se convierte en el siguiente:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Al observar con cuidado se podrá ver que cada uno de los términos del conjunto anterior, excepto el primero, se puede obtener del que le precede mediante alguna regla, ¿cuál es dicha regla?

Lo anterior permitirá introducir el siguiente concepto clave.



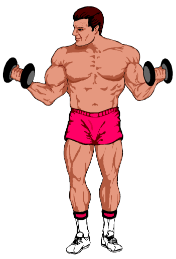
Concepto clave:

Sucesión.

Cuando se tiene un conjunto de términos formados según una ley o regla determinada, se dice que dicho conjunto es una sucesión.

Si el número de términos es limitado, la sucesión es finita, pero si el número de términos es ilimitado, lo cual se indica con puntos suspensivos, la sucesión recibe el nombre de sucesión infinita.

¿La sucesión anterior es finita o infinita?



Ejercicio 1

Propón una sucesión infinita, anotando solamente sus primeros diez términos e invita a tus compañeros a descubrir la regla que utilizaste para construirla.

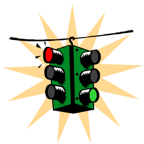
Sigamos considerando la sucesión infinita:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots,\ n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Pedir a los alumnos que averigüen qué sucede con esta sucesión cuando se divide cualquiera de sus términos, excepto el primero, con el que le precede.

¿Qué sucedió?

El resultado de este examen da pauta para introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

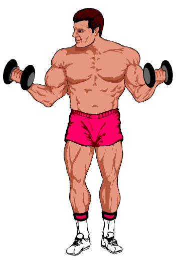
Sucesión geométrica.

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots , a_n, \dots$ representa a una sucesión, esta será geométrica si y sólo si el valor de la razón $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ permanece constante para toda n.

El valor de dicha constante se le denomina razón común y se representa con la letra minúscula r.

Así que la sucesión $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots , \frac{1}{2^n}, \dots$, que representa de manera simbólica al proceso infinito de la distancia que separa a Pedro de Juan en el problema de la carrera, es una sucesión geométrica infinita con razón común $r = \frac{1}{2}$.

Solicitar a algunos alumnos que escriban la sucesión que construyeron en el ejercicio 1, para ver si es o no es geométrica, en caso afirmativo, pedir al grupo el valor de su razón común.



Ejercicio 2

Construye una sucesión geométrica y otra que no lo sea, indicando en cada caso la regla utilizada.

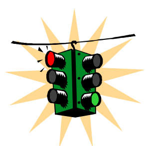
Si el profesor lo considera conveniente, mencionar que hay otros tipos de sucesiones y pedir a los alumnos investigar en particular, sobre las sucesiones aritméticas.

Ejercicio 3

Si $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ,\ a_n, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, completa la tabla siguiente para expresar desde el cuarto hasta el enésimo término de la sucesión, en función del primero de ellos.

Primer término	a_1
Segundo término	$a_2 = (a_1)(r) = a_1 r$
Tercer término	$a_3 = (a_2)(r) = (a_1 r)(r) = a_1 r^2$
Cuarto término	
Quinto término	
Sexto término	
$\vdots$	$\vdots$
Enésimo término	
$\vdots$	$\vdots$

El resultado obtenido en el renglón para el enésimo término, conocido como el término general de la sucesión, se utilizará para introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

Término general de una sucesión geométrica.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ,\ a_n, \ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, entonces su término general está dado por la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Es decir, que el término general de una sucesión es una expresión que indica la ley de formación de los términos.

Ejercicio 4

Encuentra el término general y en particular el sexagésimo término de la sucesión geométrica siguiente:

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{10},\ \frac{9}{20},\ \frac{27}{40},\ \ldots$$

Hacer notar que en cada una de las sucesiones mostradas, el valor de cada término depende del valor de n, de tal manera que a cada valor de la variable dependiente le corresponde un y sólo un valor de la variable independiente.

¿Cuál es el nombre que reciben las relaciones de una variable dependiente a una variable independiente que cumplen con la última propiedad mencionada en el párrafo anterior?

Una dificultad que podría surgir es que algunos alumnos no recuerden o aún no entiendan la dependencia funcional entre variables. Por lo tanto, para que el alumno entienda lo que sigue, habrá de hacerse un pausa para retomar el concepto de función y de los subconceptos asociados, dominio y regla de correspondencia.

De la respuesta a la pregunta anterior, se concluye que una sucesión es una función definida en los números enteros positivos $\left(\mathbb{Z}^{+}\right)$, es decir una función que tiene como dominio al conjunto $\mathbb{Z}^{+}$ y cuya regla de correspondencia estará dada por el término general.

Toda sucesión dará lugar a una función con las características mencionadas.

Por ejemplo, la sucesión $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{32},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots$ da lugar a la función $f(n)=\frac{1}{2^n},\ n\in\mathbb{Z}^{+}$.

Cuando el valor de n llega a ser y permanece mayor que cualquier número entero positivo asignado de antemano, por muy grande que éste sea, se dice que n se vuelve infinita, hecho que se denotará con $n \to \infty$, y se leerá "n se vuelve infinita".

Es el momento de pedir a los alumnos que mediante la calculadora indaguen qué sucede con el valor de las imágenes de $f(n) = \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, cuando n se vuelve infinita, con el propósito de establecer su tendencia.

Es posible que algunos alumnos no conozcan el uso de la tecla CALC de su calculadora, por lo cual se sugiere hacer un pequeño paréntesis para explicar cómo se utiliza, con esto se hará más rápido el análisis de la tendencia de la función.

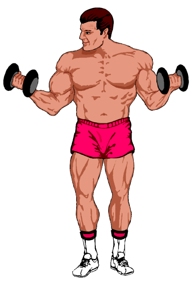
De lo observado en la calculadora que se puede registrar en una tabla, en este caso se podrá concluir que la tendencia de $f(n) = \frac{1}{2^n}$ cuando n se vuelve infinita, es cero, o bien que cuando n se vuelve infinita, $f(n)$ tiende o se hace cero.

La afirmación anterior se podrá simbolizar con cualquiera de las maneras siguientes:

a) Cuando $n \to \infty$, $f(n) \to 0$

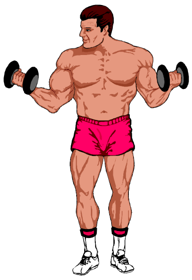
b) $\underset{n \to \infty}{f(n) \to 0}$

La tendencia observada permitirá responder a la pregunta planteada al inicio de la secuencia, de la cual se podría manifestar que $\frac{1}{2^n}$ se hace cero cuando n se vuelve infinita.



Ejercicio 5

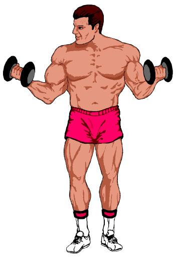
Encuentra la regla de correspondencia de la función $f(n)$ que representa a la sucesión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \frac{8}{81}, \ldots$ y determina su tendencia, cuando n se vuelve infinita.



Ejercicio 6

Establece la regla de correspondencia de la función $f(n)$ asociada a la sucesión geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \ldots$ y examina de su tendencia, cuando $n \to \infty$.

La principal dificultad que hay que enfrentar es que algunos alumnos den una interpretación errónea acerca de la tendencia de la función cuando n se vuelve infinita, lo cual se puede remediar ocupando tiempo para promover dicha habilidad, al planear como cierre a la secuencia, ejercicios utilizando diversas funciones, aunque no correspondan a sucesiones geométricas.



Ejercicio 7

Obtén la tendencia de cada una de las funciones siguientes, cuando $n \to \infty$, todas ellas con dominio el conjunto $\mathbb{Z}^+$ y escribe el resultado utilizando la notación $f(n) \underset{n\to\infty}{\to}$

a) $f(n) = 1 + \frac{1}{n}$

b) $f(n) = \frac{1}{n+1}$

c) $f(n) = \frac{2n+3}{n}$

d) $f(n) = \frac{2n+1}{1+4n}$

e) $f(n) = \frac{3^{n-1}}{6}$

f) $f(n) = \frac{2^{n-1}}{3^n}$