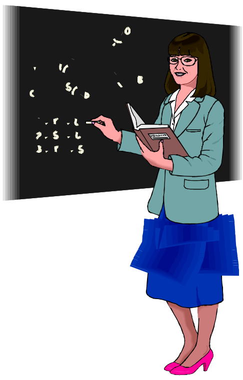
LAS SERIES GEOMÉTRICAS Y SU TENDENCIA AL INFINITO

Sugerencias al Profesor:

Al igual que las sucesiones, las series geométricas se introducen como objetos matemáticos que permiten modelar y resolver problemas que involucran procesos infinitos, no se desea realizar un estudio exhaustivo de ellas. Siguiendo la tónica de la secuencia anterior, para analizar la tendencia al infinito de las series geométricas y por ende de los procesos infinitos relacionados, se propone que los alumnos trabajen con una calculadora científica con las características mencionadas en la secuencia anterior.

Propósitos:

1. Introducir el concepto general de serie y en particular el de serie geométrica.
2. Determinar la enésima suma parcial de una serie geométrica.
3. Inspeccionar la tendencia de la enésima suma parcial de una serie geométrica cuando n se vuelve infinita.
4. Introducir el concepto de serie convergente y serie divergente.



EL PROBLEMA DE LA CARRERA (PARTE 3)

Encontrar respuesta a las interrogantes:

a) ¿Será posible efectuar la suma con una infinidad de términos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$? En caso afirmativo, ¿será cierto que el resultado es igual a 1?

b) ¿Será posible verificar que $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=\frac{1}{2}$?

Que fueron planteadas al cierre de la primera de las secuencias didácticas.

Recordar que en el análisis realizado en la secuencia mencionada se observó que la distancia total recorrida por Juan es un proceso infinito donde la distancia total recorrida por Juan está dada por la suma:

$$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\ldots+\frac{\overline{AB}}{2^n}+\ldots.$$

Y para que Juan llegue al punto B, se debería cumplir que:

$$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\ldots+\frac{\overline{AB}}{2^n}+\ldots=\overline{AB}.$$

O bien:

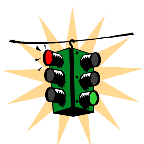
$$\left(\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=\overline{AB}$$

Lo anterior será cierto, sólo si $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$

Pero, ¿será posible efectuar una suma con una infinidad de términos y que su valor sea un número finito?

Antes de dar una respuesta a tal pregunta, hacer notar que los términos de la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$, son precisamente los términos de la sucesión geométrica $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$, explorada en la secuencia anterior.

Así que se puede introducir el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

Serie geométrica.

Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión.

Si la sucesión es geométrica, entonces la serie es geométrica.

Si el número de términos es limitado, la serie es finita, pero si el número de términos es ilimitado, lo cual se indica con puntos suspensivos, la serie es infinita.

Por lo tanto, el modelo $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^n}+...$ corresponde a una serie geométrica infinita con primer término $\frac{1}{2}$ y razón común $r=\frac{1}{2}$, de la cual habrá de responderse a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál será la suma hasta el enésimo término?
b) ¿Cómo establecer el valor de la suma de toda la serie?

Con el fin de encontrar respuesta a lo anterior, se sugiere como estrategia, primero obtener la suma hasta el enésimo término de cualquier serie geométrica y luego aplicar el resultado obtenido a la serie geométrica particular aludida.

Para lograrlo, plantear como actividad el procedimiento descrito en el párrafo siguiente, para lo cual se considerarán las sumas parciales, definidas como sigue:

$$S_1 = a$$
$$S_2 = a + ar$$
$$S_3 = a + ar + ar^2$$
$$S_4 = a + ar + ar^2 + ar^3$$
$$S_5 = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4$$
$$\vdots$$
$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ... + ar^{n-1}$$
$$\vdots$$

Con el propósito de obtener alguna expresión que permita realizar las sumas parciales sin necesidad de sumar término a término, pedir a los alumnos que realicen con cada una de las sumas parciales anotadas, la siguiente serie de cuatro operaciones, que se ejemplifica con la segunda suma parcial $S_2 = a + ar$:

1. Multipliquen la suma parcial por la razón común r : $rS_2 = ar + ar^2$

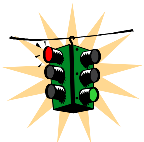
2. Resten a la suma parcial el resultado anterior, reduciendo los términos semejantes: $S_2 - rS_2 = a - ar^2$

3. Factoricen ambos miembros de la igualdad anterior: $S_2(1-r) = a(1-r^2)$

4. Dividan entre $1-r$: $S_2 = \dfrac{a\left(1-r^2\right)}{1-r}$

Una dificultad que se podría observar en este proceso, es que algunos alumnos no recuerden o ni siquiera den un significado a la operación de factorización, así que de momento se tendrá que indicar que significa en general tal operación y en particular aplicar el método del factor común. Tal vez sea un buen momento para dejar como trabajo de investigación otros métodos de factorización.

El resultado de la actividad anterior se verá reflejado en el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

Suma hasta el enésimo término de una serie geométrica.

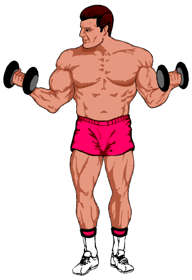
La enésima suma parcial de la serie geométrica con primer término a y razón común r es $S_n = \dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $r \neq 1$.

Así que para la serie geométrica $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}+\ldots$, donde el primer término es $a=\dfrac{1}{2}$ y la razón común es $r=\dfrac{1}{2}$, se tiene que la suma hasta el enésimo término es $S_n = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\dfrac{1}{2}}$, y por ejemplo el valor de la suma parcial hasta el quinto término será igual a $S_5 = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right)}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{31}{32}$.

El valor de la décima suma parcial es $S_{10}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{1023}{1024}$.

Ya se cuenta con una herramienta para establecer la suma de una serie geométrica hasta su enésimo término, pero si la serie es infinita, ¿cómo encontrar la suma de todos sus términos?

Si se plantea está pregunta a los alumnos, es muy probable que en poco tiempo algún estudiante proponga analizar la tendencia de la enésima suma parcial cuando n se vuelve infinita, en otras palabras investigar la tendencia de $S_n=\dfrac{a\left(1-r^n\right)}{1-r}$ cuando $n\to\infty$.



Ejercicio 1

Obtén la tendencia de la enésima suma parcial $S_n=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\frac{1}{2}}$, cuando $n\to\infty$, y escribe el resultado utilizando la notación $\underset{n\to\infty}{S_n}\to$.

Interpretar el resultado del ejercicio de la manera siguiente:

Sí fue posible realizar la suma con un número infinito de términos $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$ y concluir que como $\underset{n\to\infty}{S_n}\to 1$, entonces $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$, dando así respuesta al inciso (a) del problema inicial.

Hacer ver que la tendencia obtenida en el ejercicio anterior, también se puede conseguir de manera algebraica como sigue:

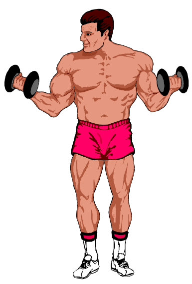
En la expresión $S_n = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}$, su tendencia cuando n se vuelve infinita, dependerá totalmente de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ y como $\left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, es decir que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ se hace cero cuando $n \to \infty$, entonces podemos concluir que $\underset{n\to\infty}{S_n} \to \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)(1-0)}{1-\frac{1}{2}} = 1$.

A partir de algunos casos particulares, establecer el siguiente resultado general:

a) Si $|r|<1$, entonces $\underset{n\to\infty}{r^n} \to 0$

b) Si $|r|>1$, entonces $\underset{n\to\infty}{r^n} \to \infty$

Una dificultad que podría surgir al implantar el resultado anterior es que la mayoría de alumnos no conozcan el concepto de valor absoluto, así que es el momento para introducirlo a través de su interpretación geométrica.



Ejercicio 2

Da respuesta al inciso (b) del problema inicial, esto es muestra que $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots=\frac{1}{2}$.

Ejercicio 3

Encuentra la suma de cada una de las series geométricas siguientes:

a) $5+\frac{5}{3}+\frac{5}{9}+\frac{5}{27}+\frac{5}{81}+\ldots$

b) $\frac{1}{2}+\frac{3}{10}+\frac{9}{50}+\frac{27}{250}+\frac{81}{1250}+\ldots$

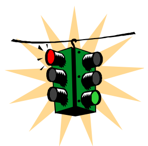
c) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+\ldots$

d) $16-4+1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots$

El inciso (c) del ejercicio mostrará a los alumnos que no siempre la suma de una serie geométrica es algún valor específico, sino que también puede volverse infinita.

Con el inciso (d) se muestra que la razón común también puede tener un valor negativo.

Como conclusión final, se puede dar cierre a la secuencia enunciando el concepto clave que sigue:



Concepto clave:

Serie geométrica convergente y serie geométrica divergente.

a) Si L es un valor constante y la enésima suma parcial de una serie geométrica es tal que $S_n \underset{n\to\infty}{\to} L$, entonces la serie es convergente y su suma es igual a L.

b) Si la enésima suma parcial de una serie geométrica es tal que $S_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, entonces la serie es divergente y su suma se vuelve infinita.