PROCESOS ITERATIVOS Y PROCESOS INFINITOS

Sugerencias al Profesor:

Para lograr una comprensión profunda de los procesos iterativos e infinitos, en la secuencia didáctica presentada se propone no restringir su enseñanza a la pura representación algebraica, sino que se deberá hacer el uso de diferentes representaciones, transitando entre ellas, para lograr, por un lado una mejor comprensión de los conceptos clave en juego y por otro fomentar habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos.

Propósitos:

1. Introducir los conceptos de proceso iterativo y de proceso infinito.
2. Motivar en el estudiante la necesidad de adquirir nuevos conocimientos para resolver situaciones problemáticas en las que no son suficientes los aprendizajes logrados en sus cursos anteriores.

EL PROBLEMA DE LA CARRERA

Juan compite en una carrera con Pedro, a lo largo de una pista recta desde el punto A hasta el punto B de longitud diferente de cero, como Juan le dobla a Pedro en velocidad, este en un gesto de generosidad le permite a Pedro iniciar en la mitad del trayecto, es decir desde el punto C tal que $\overline{AC} = \overline{CB} = \frac{\overline{AB}}{2}$ (Figura 1). Si ambos recorrieron toda la pista, ¿en cuál punto alcanzó Juan a Pedro y quién ganó la carrera?

Dar un tiempo para que los alumnos encuentren una respuesta, antes de proceder al análisis de la situación.

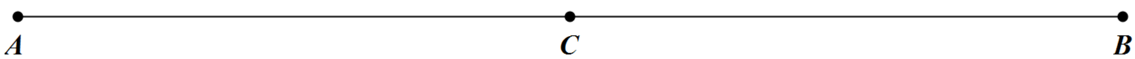


Figura 1

A pesar de que la mayoría de los alumnos tengan la respuesta correcta, lo valioso del problema radica al efectuar un análisis puntual de la situación planteada en él, con el fin de lograr los propósitos proyectados en la secuencia.

Las preguntas y ejercicios están dirigidos a los alumnos, para lograr mantener su atención en todo el desarrollo de la secuencia.

Cuando Juan llegue al punto C, Pedro ya se ha desplazado hasta el punto D (Figura 2).

¿Qué distancia separa a Pedro de Juan? $\overline{CD} =$

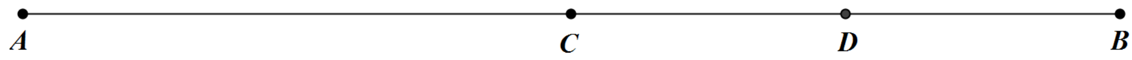


Figura 2

Cuando Juan llegue al punto D, Pedro ya se ha desplazado hasta el punto E (Figura 3).

¿Qué distancia separa a Pedro de Juan? $\overline{DE} =$

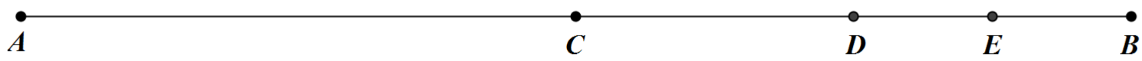


Figura 3

Cuando Juan llegue al punto E, Pedro ya se ha desplazado hasta el punto F (Figura 4).

¿Qué distancia separa a Pedro de Juan? $\overline{EF} =$

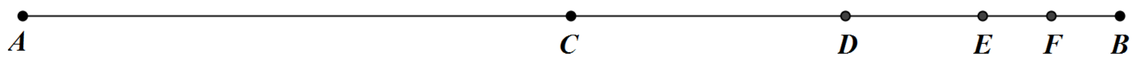


Figura 4

Cuando Juan llegue al punto F, Pedro ya se ha desplazado hasta el punto G (Figura 5).

¿Qué distancia separa a Pedro de Juan? $\overline{FG} =$

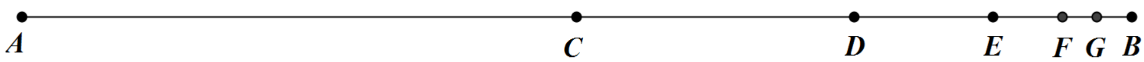


Figura 5

Observar junto a los alumnos que en la exploración realizada, sucede la siguiente regularidad:

Se inició a partir de la situación inicial dada en la Figura 1, que se identificará como la etapa 1, para transformarla según las condiciones del problema, en una nueva situación, que es la que aparece en la Figura 2, que se llamará la etapa 2.

En seguida al resultado obtenido en la etapa 2, se le aplica la misma transformación que en la etapa 1, para convertirla en la situación expuesta en la Figura 3, que siguiendo lo anterior, se llamaría la etapa 3.

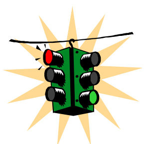
Después se obtiene la situación mostrada en la Figura 4, como resultado de aplicar la misma transformación a la situación dada en la etapa 3, que de manera similar a las anteriores, se le llamaría la etapa 4.

Por último, la Figura 5 surge del resultado de aplicar la transformación ya mencionada a la situación obtenida en la etapa 4 y que se identificará como la etapa 5.

En resumen, a partir de la situación inicial planteada en la etapa 1, se ha aplicado de manera repetitiva una transformación, la cual convirtió a dicha situación en una nueva, que a su vez fue considerada como una nueva situación inicial que al aplicarle la transformación se convirtió en otra, etcétera, obteniéndose así los resultados consecutivos de las etapas 2, 3, 4 y 5.

Las transformaciones repetitivas que convierten a una situación inicial en otras, llamadas resultado, se conocen como transformaciones iterativas.

Lo anterior dará lugar al siguiente concepto clave.



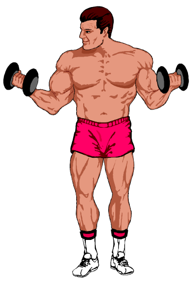
Concepto clave:

Proceso iterativo.

La idea fundamental de un proceso iterativo consiste en lo siguiente: Dada una o varias situaciones iniciales (etapa 1), se les aplica alguna transformación iterativa, la cual convierte a la situación o situaciones iniciales en otras, que pasan a ser consideradas como nuevas situaciones iniciales en el proceso.

Lo sucedido en las primeras cinco etapas del proceso iterativo sobre la distancia que separa a Pedro de Juan en el problema de la carrera, se resume en la tabla siguiente:

Etapa	Punto de posición de Juan	Punto de posición de Pedro	Distancia que separa a Pedro de Juan
1	A	C	$\dfrac{\overline{AB}}{2}$
2	C	D	$\dfrac{\overline{AB}}{4}$
3	D	E	$\dfrac{\overline{AB}}{8}$
4	E	F	$\dfrac{\overline{AB}}{16}$
5	F	G	$\dfrac{\overline{AB}}{32}$



Ejercicio 1

Completa la tabla siguiente con los resultados sobre la distancia que separa a Pedro de Juan, desde la sexta hasta la décima etapas del proceso iterativo del problema de la carrera:

Etapa	Punto de posición de Juan	Punto de posición de Pedro	Distancia que separa a Pedro de Juan
6	G	H	$\dfrac{\overline{AB}}{}$
7	H	I	$\dfrac{\overline{AB}}{}$
8	I	J	
9			
10			

¿Observas alguna relación entre el número de etapa del proceso y la distancia que separa a Pedro de Juan?

De ser así, entonces:

a) ¿Cuál es la distancia que separa a Pedro de Juan en la vigésima etapa del proceso?

b) ¿Cuál es la distancia que separa a Pedro de Juan en la sexagésima etapa del proceso?

c) En general, ¿cuál será la distancia que separa a Pedro de Juan en la enésima etapa del proceso?

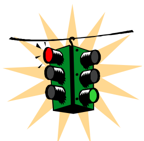
Dado un valor de n en el conjunto de los números enteros positivos, por muy grande que sea ¿se podrá determinar la distancia que separa a Pedro de Juan en la etapa $n+1$?

La respuesta afirmativa a la pregunta anterior nos hace ver que por muy grande que sea el número de veces que se realice el proceso iterativo del problema de la carrera, siempre será posible efectuar uno más.

¿Existirá un valor de n para el cual termine el mencionado proceso?

En efecto, dicho valor no existe, lo cual significa que estamos ante un proceso iterativo ilimitado, es decir, en un proceso en el cual por muy grande que sea el número de veces que se realice el proceso, siempre es posible efectuar uno más y otro más, y así sucesivamente, donde la expresión “y así sucesivamente” encierra la idea de iteración ilimitada, es decir al infinito, considerándolo como infinito potencial.

Los párrafos anteriores se resumen en el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

Proceso infinito.

La noción de proceso infinito se centra en un proceso iterativo ilimitado, es decir, que por muy grande que sea el número de veces que se realiza el proceso, siempre es posible efectuar uno más, y otro más, y así sucesivamente, hasta el infinito.

Concluir que en el análisis que se está efectuando al problema de la carrera, se presenta un proceso infinito en el cual se debe determinar cuándo la distancia que separa a Pedro de Juan será igual a cero.

En otras palabras, se desea saber cuándo la razón $\frac{\overline{AB}}{2^n}$ será igual a cero.

Según los conocimientos que has adquirido en tus cursos anteriores, ¿en qué caso una razón $\frac{a}{b}=0$?

Por la respuesta a la pregunta anterior $\frac{\overline{AB}}{2^n}=0$, sólo si $\overline{AB}=0$, pero según las condiciones del problema esto es imposible, ya que $\overline{AB}\neq 0$.

Busquemos una alternativa, si expresamos la razón $\frac{\overline{AB}}{2^n}$ como el producto $\left(\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$, ¿en qué caso el producto $\left(\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$ será igual a cero, recuerda que $\overline{AB}\neq 0$?

En efecto, puesto que un producto $(a)(b)=0$ cuando al menos uno de sus factores es igual a cero, se concluye que en el producto $\left(\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{2^n}\right)$ será igual a cero, sólo si $\frac{1}{2^n}=0$, pero otra vez, para que $\frac{1}{2^n}$ sea igual a cero, sucederá solamente que el numerador sea igual a cero, lo cual es imposible, ya que $1\neq 0$.

De lo anterior concluir que $\frac{\overline{AB}}{2^n}$ (la distancia que separa a Pedro de Juan) nunca será igual a cero, y en consecuencia Juan nunca alcanzaría a Pedro, conclusión que seguramente está en contradicción con la respuesta que dieron al principio.

Plantear que para eliminar dicha contradicción, tendríamos por resolver la siguiente duda:

¿Será posible que $\frac{1}{2^n}=0$?

Dejando de momento pendiente la respuesta a la pregunta anterior, a continuación se propone realizar un análisis para la distancia total recorrida por

Juan, a partir de la etapa 1, la cual aparece hasta la quinta etapa en la tabla siguiente:

Etapa	Distancia total recorrida por Juan
1	$\frac{\overline{AB}}{2}$
2	$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}$
3	$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}$
4	$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}$
5	$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}$

¿Cuál será la distancia total recorrida por Juan hasta la enésima etapa?

Como estamos ante un proceso infinito, entonces la distancia total recorrida por Juan será igual a:

$$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\ldots+\frac{\overline{AB}}{2^n}+\ldots.$$

Por lo tanto, para que Juan llegue al punto B, se debe cumplir que:

$$\frac{\overline{AB}}{2}+\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\ldots+\frac{\overline{AB}}{2^n}+\ldots=\overline{AB}.$$

Si del primer miembro del resultado anterior extraemos como factor común a $\overline{AB}$ obtenemos la siguiente relación:

$$\left(\overline{AB}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=\overline{AB}$$

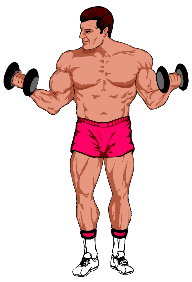
¿Qué debe cumplirse para que esta igualdad sea verdadera?

En este momento surge otra duda:

¿Será cierto que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^n}+...=1$?

De lo cual nacen otras interrogantes como las siguientes, ¿será posible realizar una suma con un número infinito de términos? ¿Será posible que al sumar esa infinidad de términos se obtenga como resultado un número finito?

Concluir que si lo anterior no fuera posible, entonces del análisis realizado, podríamos concluir que en el problema de la carrera, Juan nunca llegaría al punto B, en contradicción al supuesto de que Juan termina la carrera.



Ejercicio 2

Realiza un análisis similar al realizado para determinar la distancia total recorrida por Juan, para mostrar que la distancia total recorrida por Pedro es igual a la suma infinita:

$$\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\frac{\overline{AB}}{64}+...+\frac{\overline{AB}}{2^{n+1}}+....$$

Como en el caso de Juan, como Pedro terminó la carrera entonces se debe confirmar que la siguiente igualdad se cumple.

$$\frac{\overline{AB}}{4}+\frac{\overline{AB}}{8}+\frac{\overline{AB}}{16}+\frac{\overline{AB}}{32}+\frac{\overline{AB}}{64}+...+\frac{\overline{AB}}{2^{n+1}}+...=\frac{\overline{AB}}{2}$$

Equivalente a verificar que la siguiente relación es verdadera.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{2^{n+1}}+...=\frac{1}{2}$$

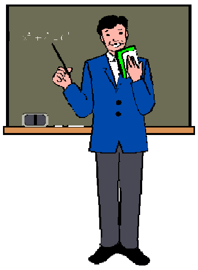
Donde otra vez surge la duda, ¿será posible realizar la suma de un número infinito de términos? Si la respuesta es no, estaremos en la misma contradicción observada anteriormente con Juan, Pedro jamás terminaría la carrera.

Establecer la siguiente conclusión como cierre de la secuencia: Para eliminar las contradicciones encontradas, que históricamente dieron lugar a paradojas por considerar solamente al infinito potencial, es necesario construir las herramientas matemáticas necesarias que incluyan al infinito actual y que nos permitan en particular, resolver las dudas que surgieron en el desarrollo de esta secuencia didáctica, esbozadas en las cuestiones siguientes:

a) ¿Cuándo $\frac{1}{2^n}=0$?

b) ¿Será posible efectuar la suma infinita $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...+\frac{1}{2^n}+...$? En caso afirmativo, ¿será cierto que el resultado es igual a 1?

c) ¿Será posible verificar que $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+...+\frac{1}{2^{n+1}}+...=\frac{1}{2}$?



Sugerencias al Profesor:
Otras situaciones problemáticas que dan lugar a procesos infinitos, se pueden consultar en los materiales elaborados por el Grupo Institucional "Dolores Brauer" del Plantel Azcapotzalco del CCH, donde además se podrán encontrar propuestas de ejercicios con el fin de ir evaluando el proceso de aprendizaje de los alumnos

a) www.grupodoloresbrauer.com.mx/Guias_extraordinario/CalculoI/UNIDAD1.pdf

Liga directa a la unidad Procesos Infinitos y la Noción de Límite de la Guía para el Examen Extraordinario de Cálculo Diferencial e Integral I.

a) www.grupodoloresbrauer.com.mx

D*irección electrónica de la página del grupo donde se tiene acceso, entre otras, a la Guía completa para el Examen Extraordinario de Cálculo Diferencial e Integral I, con la posibilidad de generar a partir de un banco de reactivos, exámenes para evaluar los aprendizajes logrados por los alumnos.*

b) Ramírez del Castillo C… [et al]. Cálculo Diferencial e Integral I: Cuaderno de Trabajo. Unidad 1. México. Editorial Trillas. 2007.