LA NOCIÓN DE LÍMITE AL INFINITO

Sugerencias al Profesor:

Dado que el concepto de límite es uno de los conceptos en el que se observa una mayor dificultad en su aprendizaje, sobre todo cuando se define formalmente, en la secuencia se propone evitar tal definición y abordar la noción de límite al infinito a partir de la interpretación de las tendencias de la función al infinito, trabajadas en secuencias anteriores, dando lugar a una definición que sin estar exenta de rigor matemático, intenta salvar las dificultades que podrían surgir en su aprendizaje. Procurar evitar en el en el discurso de la exposición del tema la expresión "se aproxima tanto como se quiera" que es muy frecuente utilizar, pero que crea conflicto en los alumnos debido a su imprecisión.

Propósitos:

1. Constituir la noción de límite al infinito de una función a partir de su tendencia al infinito.

EL PROBLEMA DEL EXAMEN DE DIAGNÓSTICO

A un grupo de Cálculo Diferencial e Integral I, con una lista de cincuenta estudiantes, se le aplicó al inicio del curso un examen de diagnóstico y la proporción de alumnos que lo aprobaron fue $p = 0.\overline{63}$. Si ese día asistieron más de cuarenta alumnos, ¿cuántos alumnos presentaron el examen y cuántos de ellos lo aprobaron?

Luego de dar un tiempo para que los alumnos intenten encontrar la respuesta al problema, iniciar el análisis de la situación destacando que la proporción de aprobados define un proceso (potencialmente) infinito:

$$p = 0.63636363636363...$$

Al plantear la pregunta, ¿cuáles números tienen una expresión decimal periódica?, es posible que surja la dificultad de que los alumnos no recuerden qué tipo de números cumplen con tal condición, así que para salvarla conviene hacer un breve recordatorio sobre los números racionales e indicar que la solución al problema se logrará cuando se encuentre el número racional correspondiente al valor de la proporción de aprobados.

En el proceso infinito indicado, la proporción de alumnos aprobados en la primera, segunda y tercera etapa son, respectivamente:

$$p_1 = 0.63 = \frac{63}{100}$$

$$p_2 = 0.6363 = 0.63 + 0.0063 = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000}$$

$$p_3 = 0.636363 = 0.63 + 0.0063 + 0.000063 = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000}$$

¿Cuál será la proporción de alumnos aprobados en la cuarta y en la quinta etapa del proceso?

Permitir a los estudiantes que obtengan la proporción de alumnos aprobados hasta la enésima etapa del proceso, la cual está dada por la suma:

$$p_n = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + ... + \frac{63}{100^n}$$

Concluir que como la proporción de alumnos aprobados está dada por un proceso infinito, su valor será igual al resultado de la suma infinita:

$$p = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + ... + \frac{63}{100^n} + ...$$

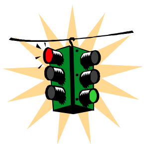
La suma anterior, ¿es una serie geométrica? Si la respuesta es afirmativa:

a) ¿Cuál es el valor de su razón común?
b) ¿Cuál es su suma hasta el enésimo término?
c) ¿La serie es convergente?

Hacer una pausa para discutir por qué la relación obtenida en la enésima suma parcial define una función $S(n)$ con dominio $\mathbb{Z}^+$ y manifestar que el problema tendrá solución, sólo si $S(n) \underset{n\to\infty}{\to} L$.

¿Cuál es la función $S(n)$ asociada al problema del examen de diagnóstico?

Es el momento para constituir la noción de límite al infinito de una función, ya que el referido valor L, si es que existe, se le conoce como el límite de la función $S(n)$ cuando n se vuelve infinita, que se escribe $\underset{n\to\infty}{lím}\ S(n) = L$ y se lee "el límite de $S(n)$ cuando n tiende al infinito es igual a L", lo cual se resume en el siguiente concepto clave.



Concepto clave:

Noción de límite al infinito.

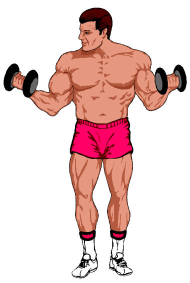
Si la función $S(n)$ es tal que $S(n) \underset{n\to\infty}{\to} L$, entonces el número L es el límite de la función $S(n)$ cuando n tiende al infinito y se escribe $\underset{x\to\infty}{lím}\ S(n) = L$. Esto último significa que conforme n tiende al infinito, los valores de las imágenes de $S(n)$ se aproximan a L más que a cualquier otro número.

En este nuevo contexto, el problema inicial tendrá solución, si es que existe el límite de $S(n)$ cuando n tiende al infinito.

Para la función $S(n)$ asociada al problema del examen de diagnóstico, su límite cuando n tiende al infinito, depende de $\left(\frac{1}{100}\right)^n$, pero sabemos que $\left(\frac{1}{100}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, por lo tanto $\underset{n\to\infty}{lím} \left(\frac{1}{100}\right)^n = 0$, concluyendo finalmente que

$$\underset{n\to\infty}{lím}\ S(n) = \frac{\left(\frac{63}{100}\right)(1-0)}{1-\frac{1}{100}} = \frac{7}{11}.$$

El cálculo del límite anterior muestra que en el problema del examen de diagnóstico, la proporción de alumnos que aprobaron el examen de diagnóstico es $p = \dfrac{7}{11}$, es decir, que siete de cada once alumnos que se presentaron al examen lo aprobaron. De esta interpretación se puede deducir la respuesta al problema, ¿cuál es?



Ejercicio 1

Haciendo uso de la noción de límite al infinito en una serie geométrica, determina la fracción correspondiente a cada uno de los números decimales periódicos siguientes:

a) $0.\overline{12}$

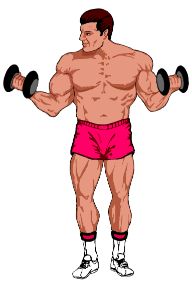
b) $0.2\overline{14}$

c) $3.46\overline{1}$

Se pueden establecer los siguientes resultados, haciendo énfasis que en la expresión $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = \infty$, la función $S(n)$ no se aproxima a un límite, ya que el infinito no es un número, así que tal expresión deberá leerse "la función $S(n)$ se vuelve infinita" o mejor dicho que "el límite de la función $S(n)$ es infinito", y no que "la función $S(n)$ se aproxima al infinito".

a) Si $|r| < 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = \dfrac{a}{1-r}$

b) Si $|r| > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} S(n) = \infty$



Ejercicio 2

Haciendo uso de la noción de límite al infinito o de alguno de los resultados anteriores, responde la siguiente pregunta:

¿ $0.9999999999\ldots$, es menor o es igual a uno?