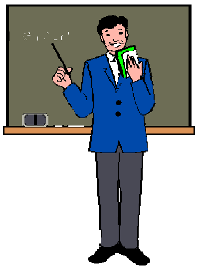
EL LÍMITE AL INFINITO EN EL CÁLCULO DE ÁREAS BAJO UNA CURVA



Sugerencias al Profesor:

Comentar que uno de los problemas fundamentales que dieron origen al Cálculo Integral es el de acumulación, el cual se manifiesta en el cálculo de áreas bajo una curva, utilizando un método de aproximación que consiste básicamente en trazar un número finito n de rectángulos, calcular el área de cada uno de ellos y sumarlas, obteniendo la llamada suma de Riemann. El área buscada estará dada por el límite al infinito de dicha suma.

Propósitos:

1. Emplear la noción de límite al infinito en el cálculo de áreas bajo una curva.
2. Establecer las principales reglas para calcular límites algebraicamente.
3. Introducir los límites que permiten operar con el infinito.

EL PROBLEMA DE LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA

Sabiendo que $1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\dfrac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$, encuentra el área de la superficie limitada por la parábola $f(x)=x^2$ y el eje de abscisas en el intervalo cerrado $[0,1]$, mostrada en la figura 1.

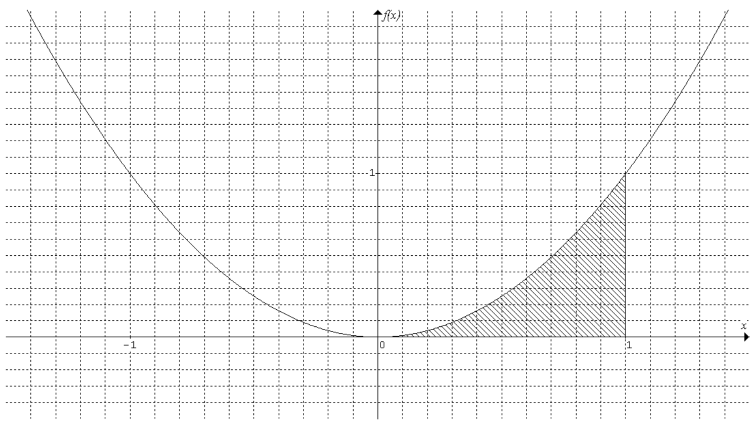


Figura 1

Para resolver el problema, describir cada una de las etapas del siguiente proceso que conducirá en su enésima etapa a la suma de Riemann correspondiente:

Etapa 1. Considerar el rectángulo de base el intervalo $[0,1]$, mostrado en la figura 2.

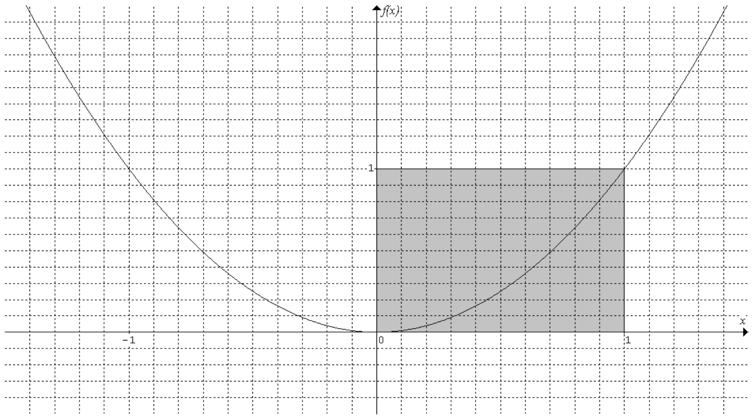


Figura 2

Se sugiere que en cada etapa del proceso, los alumnos calculen el valor del área de la superficie sombreada.

Una dificultad que podría surgir es que los alumnos no se den cuenta que las alturas de los rectángulos formados, corresponden a valores específicos de la función graficada, por lo que se deberá orientar mediante una breve discusión, cómo obtenerlas.

Posteriormente se irán obteniendo expresiones que finalmente conducirán a la suma de Riemann.

El valor del área en la primera etapa (primera aproximación del área pedida) se puede expresar como:

$$A_1 = (1)\left(1^2\right) = \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1^2}{1^2}\right) = \left(\frac{1}{1^3}\right)\left(1^2\right)$$

Etapa 2: Dividir el intervalo $[0,1]$ en dos partes iguales para formar los dos rectángulos que aparecen en la figura 3.

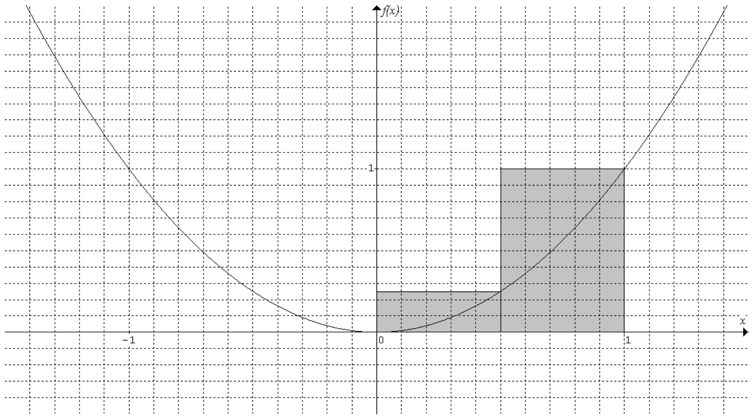


Figura 3

El valor del área en la segunda etapa (segunda aproximación del área pedida) se puede expresar como:

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(1^2\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1^2}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2^2}{2^2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1^2+2^2}{2^2}\right)$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)\left(1^2 + 2^2\right)$$

Etapa 3: Dividir el intervalo $[0,1]$ en tres partes iguales para formar los tres rectángulos que aparecen en la figura 4.

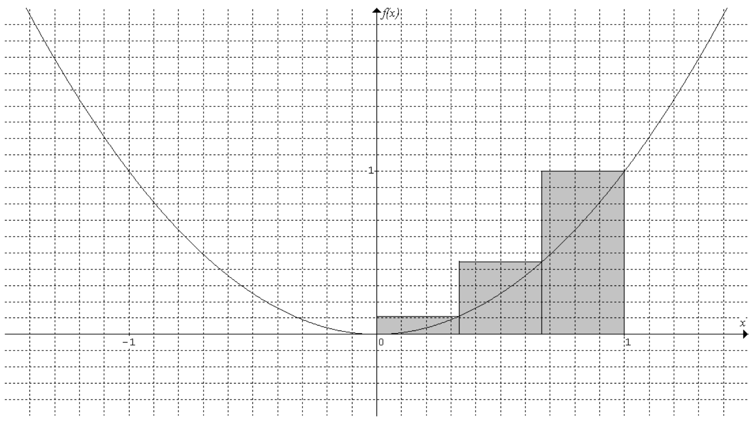


Figura 4

El valor del área en la tercera etapa (tercera aproximación del área pedida) se puede expresar como:

$$A_3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\left(\frac{3}{3}\right)^2\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1^2}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2^2}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3^2}{3^2}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1^2+2^2+3^2}{3^2}\right)$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{3^3}\right)\left(1^2+2^2+3^2\right)$$

Etapa 4: Dividir el intervalo $[0,1]$ en cuatro partes iguales para formar los cuatro rectángulos que aparecen en la figura 5.

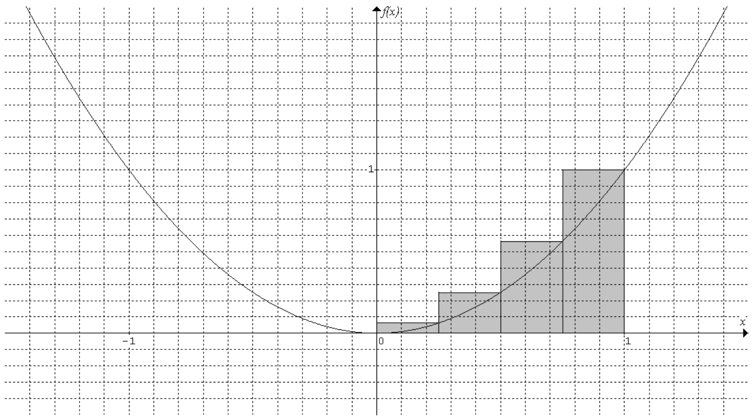


Figura 5

El valor del área en la cuarta etapa (cuarta aproximación del área pedida) se puede expresar como:

$$A_4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{2}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\left(\frac{4}{4}\right)^2\right)$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1^2}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2^2}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3^2}{4^2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4^2}{4^2}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1^2+2^2+3^2+4^2}{4^2}\right)$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{4^3}\right)\left(1^2+2^2+3^2+4^2\right)$$

Etapa 5: Dividir el intervalo $[0,1]$ en cinco partes iguales para formar los cinco rectángulos que aparecen en la figura 6.

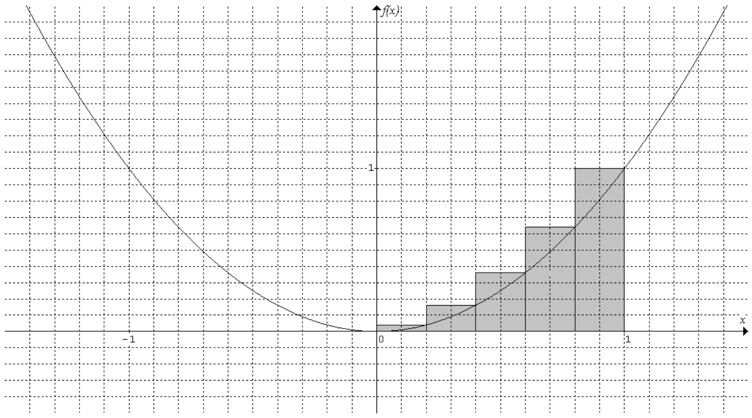


Figura 6

El valor del área en la quinta etapa (quinta aproximación del área pedida) se puede expresar como:

$$A_5=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\left(\frac{3}{5}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\left(\frac{5}{5}\right)^2\right)$$

$$A_5=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1^2}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2^2}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{3^2}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{4^2}{5^2}\right)+\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{5^2}{5^2}\right)$$

$$A_5=\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5^2}\right)=\left(\frac{1}{5^3}\right)\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2\right)$$

Del análisis efectuado hasta esta etapa, se espera que los alumnos puedan inferir que en la enésima etapa del proceso, el valor del área estará dada por:

$$A_n=\left(\frac{1}{n^3}\right)\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+\ldots+n^2\right).$$

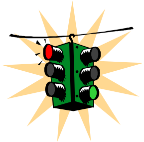
Como $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$, en definitiva se tendrá que la suma de Riemann está dada por la función:

$$A(n)=\left(\frac{1}{n^3}\right)\left(\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Por lo que el valor del área buscada estará dada por $A_T=\lim\limits_{n\to\infty} A(n)$.

Pedir a los alumnos que simplifiquen la regla de correspondencia de la función $A(n)$, y que encuentren con la calculadora, el valor de su límite cuando n se vuelve infinita.

A continuación hay que mostrar cómo calcular el límite de manera algebraica, para lo cual se sugiere realizar el procedimiento lo más detallado posible, aplicando de manera explícita los siguientes conceptos clave, en el primero se exponen resultados de límites al infinito que pueden ser utilizados para realizar operaciones con el infinito, mientras que en el segundo se enuncian las principales reglas para el cálculo algebraico de límites al infinito.



Concepto clave:

Límites que sugieren reglas para operar con el infinito.

Si c es una constante y $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = \infty^k = \infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{1}{n}\right] = \dfrac{1}{\infty} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^k}\right) = \dfrac{1}{\infty^k} = 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty} [n+c] = \infty + c = \infty$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} [n-c] = \infty - c = \infty$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} [c-n] = c - \infty = -\infty$

8) $\lim\limits_{n\to\infty} [c\cdot n] = (c)(\infty) = \infty$, si $c>0$

9) $\lim\limits_{n\to\infty} [c\cdot n] = (c)(\infty) = -\infty$, si $c<0$

10) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)\left(\infty^k\right) = \infty$, si $c>0$

11) $\lim\limits_{n\to\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)\left(\infty^k\right) = -\infty$, si $c<0$

12) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{c}{n}\right]=\dfrac{c}{\infty}=0$

13) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{c}{n^k}\right]=\dfrac{c}{\infty^k}=0$

14) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{c}\right]=\dfrac{\infty}{c}=\infty$, si $c>0$

15) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n}{c}\right]=\dfrac{\infty}{c}=-\infty$, si $c<0$

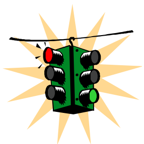
16) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{\infty^k}{c}=\infty$, si $c>0$

17) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{\infty^k}{c}=-\infty$, si $c<0$

Una actividad interesante es pedir a los alumnos un resultado para cada una de las operaciones siguientes y posteriormente organizar una breve discusión para explicar el por qué son indeterminadas:

a) $\infty-\infty$

b) $\dfrac{\infty}{\infty}$



Concepto clave:

Principales reglas para el cálculo algebraico de límites al infinito.

Si $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=L$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{g}(n)=M$, entonces:

a) Regla de la suma para límites: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(n)+g(n)\right]=L+M$

b) Regla del producto para límites: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(n)\cdot g(n)\right]=L\cdot M$

c) Regla del cociente para límites: Si $M\neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(n)}{g(n)}\right]=\dfrac{L}{M}$

d) Si c es una constante, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} c=c$ y $\lim\limits_{n\to\infty}\left[c\cdot f(n)\right]=c\cdot L$

Se sugiere primero realizar algún o algunos desarrollos que conduzcan a la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

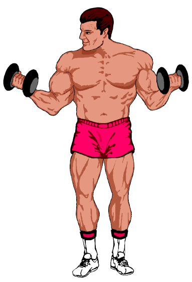
Por ejemplo, sustituir ∞ en lugar de n y luego operar con el infinito.

$$\lim_{n\to\infty} A(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \frac{(2)(\infty^2)+(3)(\infty)+1}{(6)(\infty^2)} = \frac{\infty+\infty+1}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Posteriormente mostrar algún procedimiento que evite tal indeterminación, por ejemplo el siguiente, donde se aplican de modo explícito, las correspondientes reglas para el cálculo algebraico del límite al infinito.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} A(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n+1}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{6n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{6n^2} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{6}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{1}{6}\right)(0) = \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el valor del área pedida en el problema de la cuadratura de la parábola es igual a $\frac{1}{3}$



Ejercicio 1

Aceptando que $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3 = \left[\frac{(n)(n+1)}{2}\right]^2$, encuentra por medio del límite al infinito de una suma de Riemann, el área de la superficie limitada por la gráfica de $f(x)=x^3$ y el eje de abscisas en el intervalo cerrado $[0,1]$, mostrada en la figura 7.

En las figuras 8 a 11 se exponen, respectivamente, los resultados en las etapas 1 a 4 del proceso.

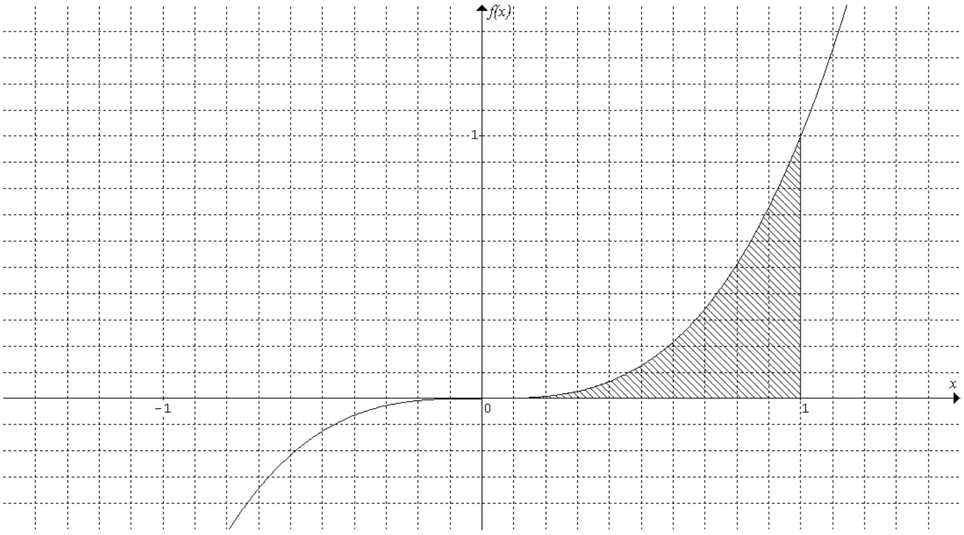


Figura 7

Primera etapa

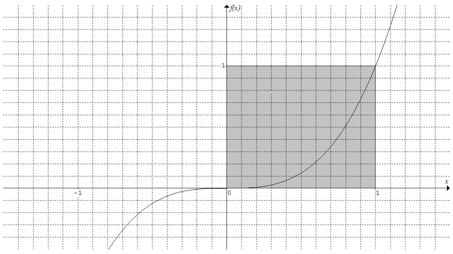


Figura 8

Segunda etapa

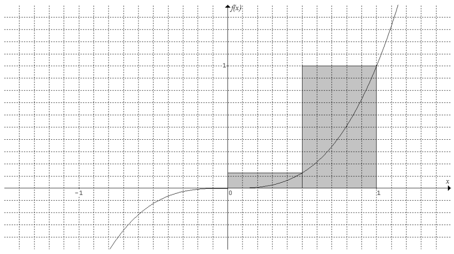


Figura 9

Tercera etapa

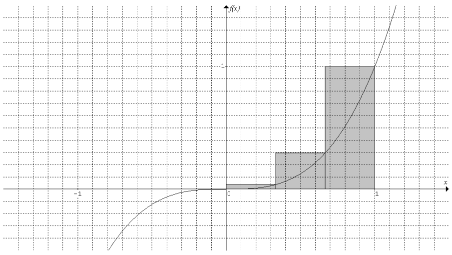


Figura 10

Cuarta etapa

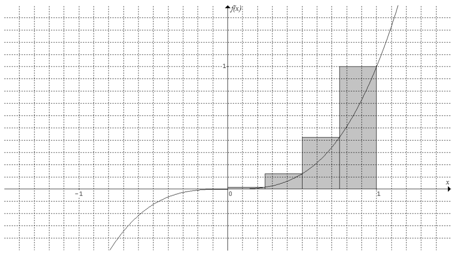


Figura 11