LA NOCIÓN DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Sugerencias al Profesor:

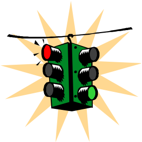
También en este caso se deberá procurar no definir formalmente el concepto de límite de una función en un punto, sino que se deberá abordar estableciendo una extensión de la noción de límite al infinito expuesta y trabajada en secuencias anteriores, enfatizando que para encontrar el límite de una función en un punto, no interesa lo que pasa en dicho punto, sino lo que sucede a su alrededor, puesto que la existencia del límite no depende de que la función esté definida en el punto. Se recomienda llevar impresas las gráficas de las funciones con las que se trabajará, para establecer por un lado la correspondencia que hay entre los registros algebraico y gráfico en la determinación de los límites deseados, y por otro promover la habilidad mencionada en los propósitos de la secuencia, trabajar solamente con funciones polinomiales y racionales, presentando primero el caso cuando la función está definida en el punto, y posteriormente aquellos que sin estar definida la función en el punto, inducen a la expresión $\frac{c}{0}$*, con* $c \neq 0$ *o a la indeterminación* $\frac{0}{0}$*.*

Propósitos:

1. Extender la noción de límite al infinito de una función de variable real a la noción de límite de una función de variable real en un punto.
2. Introducir el concepto de límites laterales, como instrumento para mostrar la existencia del límite de una función en un punto.
3. Relacionar los registros algebraico y gráfico en la determinación del límite de una función en un punto.
4. Promover la habilidad de obtener límites de manera algebraica y gráfica.

No es del todo desconocido que el principal obstáculo que se habrá de afrontar, son las dificultades en el manejo del álgebra que mostrarán algunos alumnos, por ejemplo en la resolución de ecuaciones algebraicas de grado superior a dos, en el desarrollo de productos notables o en el proceso de factorización, por lo cual se sugiere que con la intensión de salvar tal impedimento, se elabore una serie de ejercicios con la temática mencionada y la no mencionada que se considere relevante, que se dejarán de tarea antes de desarrollar la presente secuencia.

Iniciar la secuencia construyendo el siguiente concepto clave a partir de la noción de límite al infinito de una función de variable real expuesto anteriormente.



Concepto clave:

Límite de una función de variable real en un punto.

Sea $f(x)$ una función de variable real y $a \in \mathbb{R}$, el número L es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a, que se denota $\underset{x \to a}{lím}\, f(x) = L$, si cuando x se aproxima al número a, las imágenes de $f(x)$ se aproximan al valor L más que a cualquier otro número.

Si $\underset{x \to a}{lím}\, f(x) = \infty$, entonces se dice que el límite es infinito.

Si $\underset{x \to a}{lím}\, f(x) = -\infty$, entonces se dice que el límite es menos infinito.

Si $f(x)$ es una función polinomial o racional y está definida para $x = a$, se cumple que $\underset{x \to a}{lím}\, f(x) = f(a)$, lo cual sugiere que para encontrar $\underset{x \to a}{lím}\, f(x)$, basta con encontrar la imagen de a.

Ejemplos.

a) Si $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x - 6$, encuentra $\underset{x \to 1}{lím}\, f(x)$.

¿Cuál es el dominio de $f(x)$?

Como su dominio es el conjunto $\mathbb{R}$, la función está definida en $x = 1$. Por lo tanto, $\underset{x \to 1}{lím}\left[2x^3 - 8x^2 + 5x - 6\right] = f(1) = -7$.

Una vez calculado el límite, trabajar con la calculadora para ver que en efecto cuando $x \to 1$, se tiene que $f(x) \to -7$, sugiriendo de manera secuencial valores cercanos a 1 pero menores y mayores que él.

Menores que 1: .9, .999, .9999, .99999, .999999, .9999999, etcétera.

Mayores que 1: 1.1, 1.01, 1.001, 1.0001, 1.00001, 1.000001, etcétera.

Hacer ver que en el primer caso se están acercando al valor 1 por la izquierda, hecho que se simboliza $x \to 1^-$, mientras que en el segundo caso se están acercando a 1 por la derecha, lo cual se simboliza $x \to 1^+$.

Lo anterior muestra que $\underset{x \to 1^-}{lím} f(x) = -7$ y $\underset{x \to 1^+}{lím} f(x) = -7$, llamados límites laterales.

Dar una interpretación geométrica de este análisis apoyándose de la gráfica de la función que aparece en la figura 1.

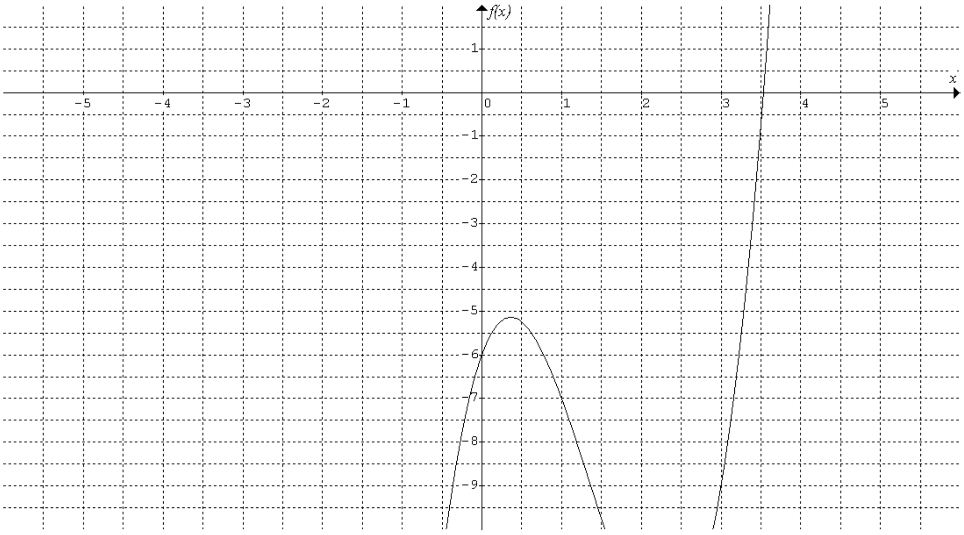
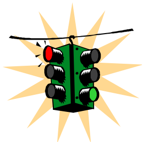


Figura 1

Esta actividad permitirá reforzar la noción de límite de una función en un punto, relacionar los registros algebraico y gráfico y sentar las bases para introducir el siguiente concepto clave que se utilizará para mostrar la existencia del límite.



Concepto clave:

Existencia y unicidad del límite de una función en un punto.

Si $\underset{x \to a^-}{lím} f(x) = L$ y $\underset{x \to a^+}{lím} f(x) = L$, entonces existe $\underset{x \to a}{lím} f(x)$ y $\underset{x \to a}{lím} f(x) = L$.

Notas:

Si existe el límite de una función en un punto, es único.

Este límite también puede ser infinito o menos infinito.

b) Si $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 4x - 6}$, encuentra $\underset{x \to -2}{lím} f(x)$.

¿Cuál es el dominio de $f(x)$?

Puesto que su dominio es el conjunto $\mathbb{R}-\{-3,1\}$, la función está definida en $x=-2$. Por lo tanto, $\underset{x\to -2}{lím}\left[\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2+4x-6}\right]=f(-2)=-\dfrac{3}{2}$.

Posteriormente proceder de manera análoga al ejemplo anterior, para mostrar la existencia del límite, esto es probar utilizando la calculadora que se cumple con la condición $\underset{x\to -2^-}{lím}\ f(x)=-\dfrac{3}{2}$ y $\underset{x\to -2^+}{lím}\ f(x)=-\dfrac{3}{2}$, en la figura 2 aparece la gráfica de la función para verificar los resultados obtenidos y relacionar los registros ya mencionados.

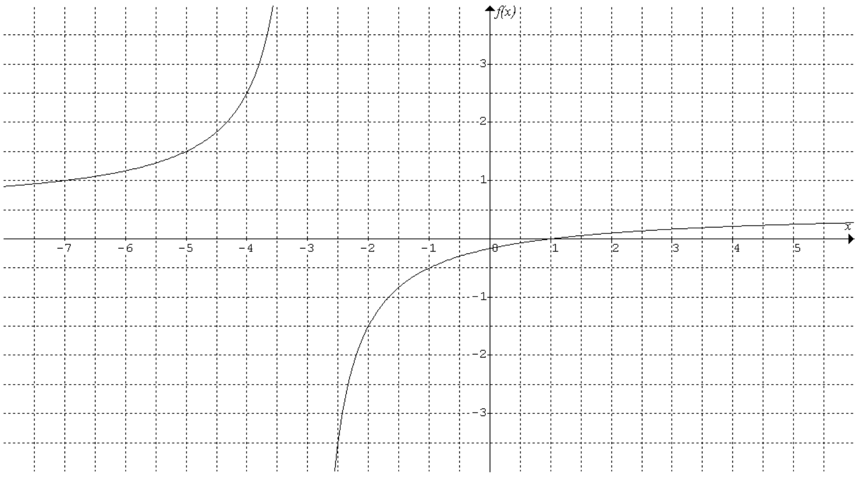
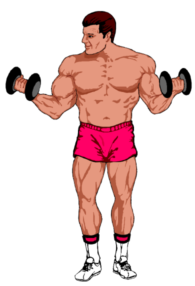


Figura 2



Ejercicio 1

Haciendo uso de la calculadora para encontrar los límites laterales y apoyándote de las gráficas mostradas en las figuras 3 y 4 para interpretar tus resultados, determina cuál de las funciones siguientes tiene límite en $x=0$.

a) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, ver la figura 3.

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, ver la figura 4.

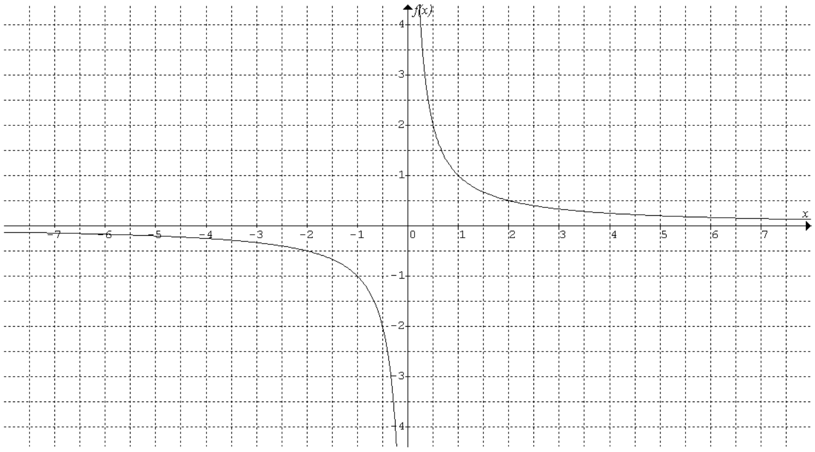


Figura 3

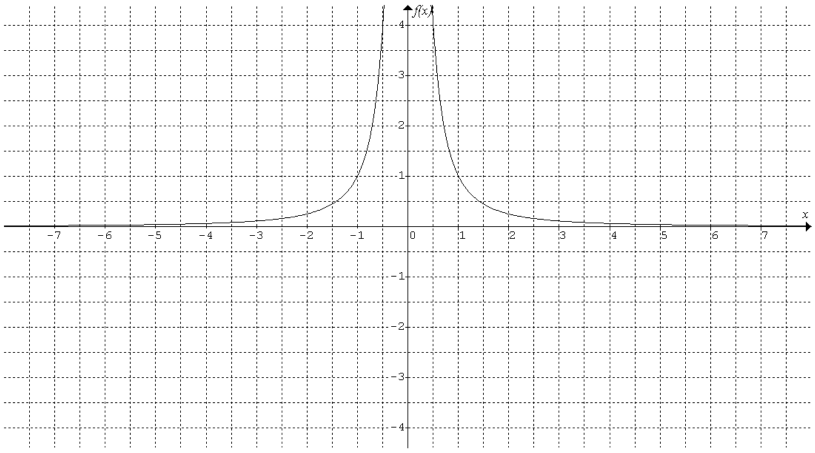
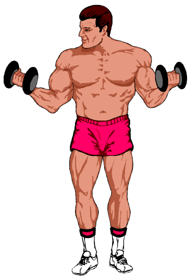


Figura 4

Comentar que al sustituir el valor $x = 0$ en las funciones del ejercicio 1, en ambos casos se obtiene la expresión $\frac{1}{0}$, sin embargo en el primer caso no existe el límite pero en el segundo caso, sí existe.

En general, cuando al sustituir el valor de la variable independiente en la regla de correspondencia de la función se obtiene la expresión $\frac{c}{0}$ siendo c una constante diferente de cero, puede suceder que exista o que no exista el límite de la función en el punto, en caso de existir puede que sea infinito o menos infinito, así que para obtener algebraicamente este tipo de límites sugerir encontrarlos a través de los límites laterales.



Ejercicio 2.

Sabiendo que en una función racional $f(x)$, la recta $x=a$ es una asíntota vertical de su gráfica, solo si se verifica cualquiera de los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)=-\infty$, encuentra las asíntotas verticales de la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^3-x^2-8x+12}$, cuya gráfica se muestra en la figura 5.

Auxiliar a los alumnos indicándoles que los posibles valores de a, se deben buscar entre aquellos que no pertenecen al dominio de la función.

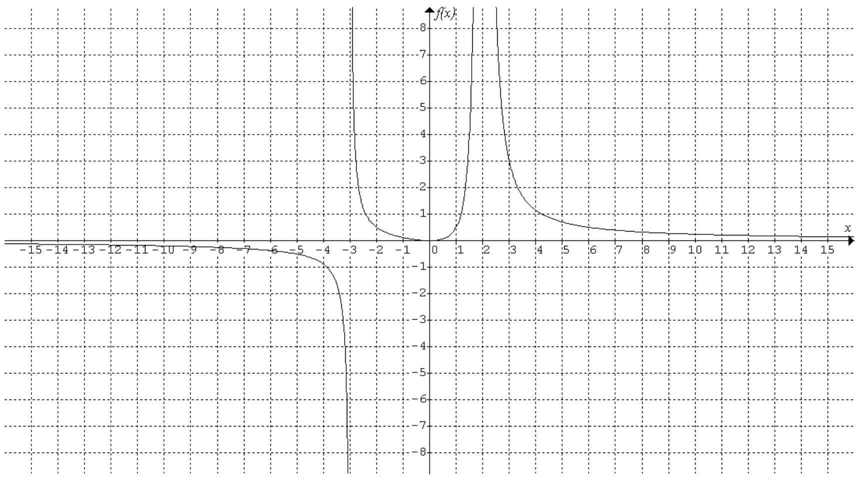
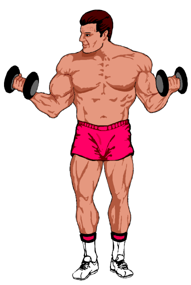


Figura 5



Ejercicio 3.

En la figura 6 está la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$, sin hacer cálculos, determina los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x\to 1^{-}} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

d) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

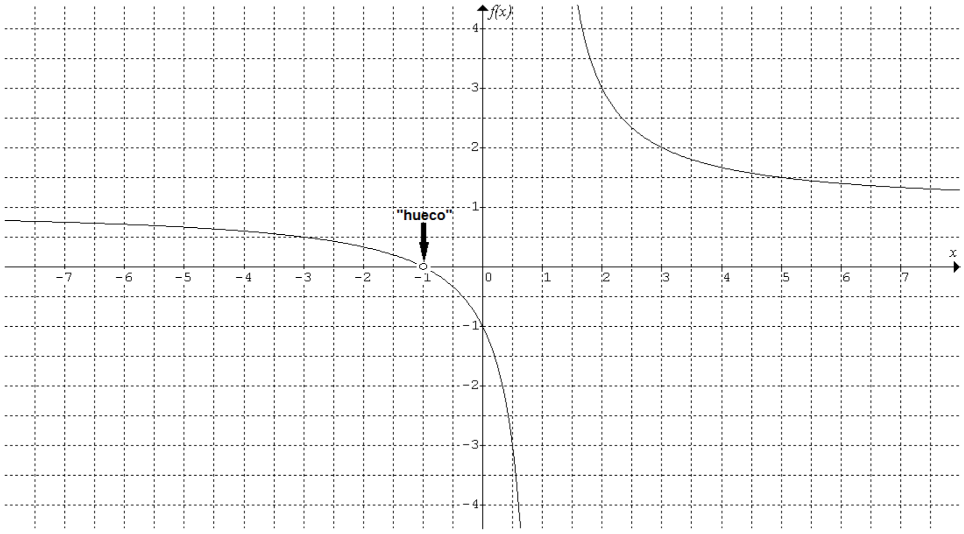


Figura 6

Resaltar que en la gráfica de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ hay un "hueco" en $x=-1$, argumentando por qué.

Si bien la función no está definida para $x=-1$, plantear la pregunta ¿existirá $\underset{x\to -1}{lím}\ f\left(x\right)$?

Para responder los alumnos tendrán que plantear y encontrar los límites laterales $\underset{x\to -1^-}{lím}\ f\left(x\right)$ y $\underset{x\to -1^+}{lím}\ f\left(x\right)$.

Como $\underset{x\to -1^-}{lím}\ f\left(x\right)=0$ y $\underset{x\to -1^+}{lím}\ f\left(x\right)=0$, se concluye que el límite existe y que $\underset{x\to -1}{lím}\ f\left(x\right)=0$.

Este resultado nos hace ver que para encontrar el límite de una función en un punto, no interesa lo que pasa con dicho punto, sino lo que sucede a su alrededor, ya que no es necesario que la función esté definida en el punto para que exista el límite en tal punto.

Mostrar que si se hubiera sustituido el valor $x=-1$ en la regla de correspondencia de la función, se obtendría lo siguiente:

$$\underset{x\to -1}{lím}\ f\left(x\right)=\frac{\left(-1\right)^2+\left(2\right)\left(-1\right)+1}{\left(-1\right)^2-1}=\frac{0}{0}$$

Pero, ¿a qué será igual $\frac{0}{0}$? Promover una breve discusión para concluir que tal expresión es una indeterminación.

A continuación exponer la estrategia usual “factorizar los polinomios y simplificar la fracción”, para resolver esta indeterminación sin echar mano de los límites laterales.

Así, $\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}\right]=\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]=\frac{-1+1}{-1-1}=0$

Explicar que en este procedimiento se ha definido de manera implícita la nueva función $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$, que coincide con $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}$ en todos sus puntos, excepto en $x=-1$, como puede observarse en su gráfica, mostrada en la figura 7.

Esta nueva función, sí está definida para $x=-1$, por lo que $\lim\limits_{x\to -1} g(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left[\frac{x+1}{x-1}\right]=g(1)=\frac{-1+1}{-1-1}=0$.

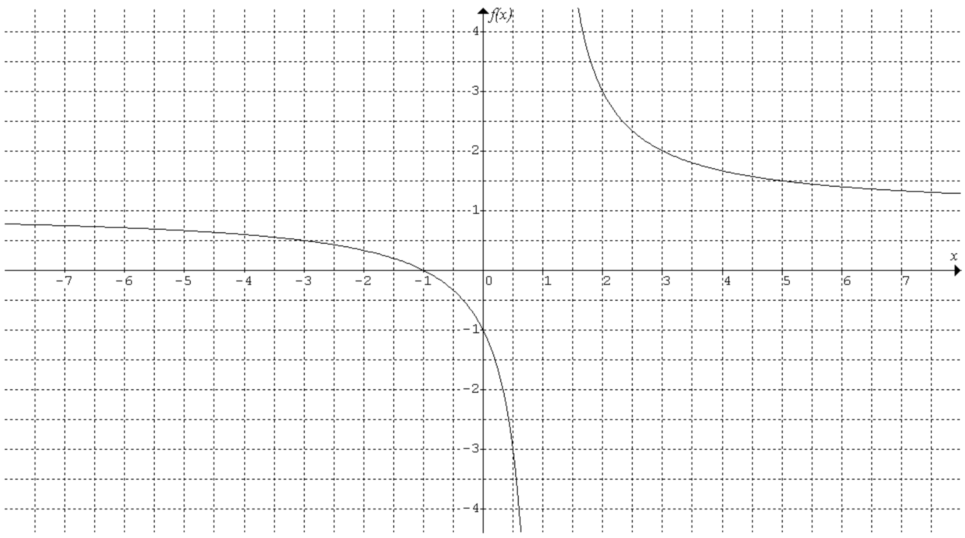
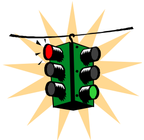


Figura 7

Mencionar que en el cálculo de los límites anteriores, se han aplicado de manera implícita las principales reglas enunciadas para el cálculo algebraico de límites al infinito, que en este contexto estarían establecidas como sigue:



Concepto clave:

Principales reglas para el cálculo algebraico de límites en un punto.

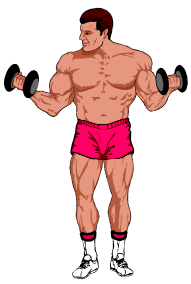
Si $a \in \mathbb{R}$ y además $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$, entonces:

a) Regla de la suma para límites: $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$

b) Regla del producto para límites: $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$

c) Regla del cociente para límites: Si $M \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$

d) Si c es una constante, entonces $\lim\limits_{x \to a} c = c$ y $\lim\limits_{x \to a} \left[c \cdot f(x) \right] = c \cdot L$



Ejercicio 4.

Encontrar algebraicamente cada uno de los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\frac{x^2 - 3x}{x} \right]$

b) $\lim\limits_{x \to 3} \left[\frac{x^2 - 9}{x^2 + 2x - 15} \right]$

c) $\lim\limits_{x \to -2} \left[\frac{2x^2 + 5x + 2}{x + 2} \right]$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right]$

e) $\lim\limits_{x \to 1} \left[\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} \right]$

f) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{x^2}{x - 2} \right]$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{x^2}{x^3 - x^2 - 8x + 12} \right]$