CONCEPTOS CLAVE DE LA UNIDAD 1

1. Proceso iterativo.

La idea fundamental de un proceso iterativo consiste en lo siguiente: Dada una o varias situaciones iniciales (etapa 1), se les aplica alguna transformación iterativa, la cual convierte a la situación o situaciones iniciales en otras, que pasan a ser consideradas como nuevas situaciones iniciales en el proceso.

2. Proceso infinito.

La noción de proceso infinito se centra en un proceso iterativo ilimitado, es decir, que por muy grande que sea el número de veces que se realiza el proceso, siempre es posible efectuar uno más, y otro más, y así sucesivamente, hasta el infinito.

3. Sucesión.

Cuando se tiene un conjunto de términos formados según una ley o regla determinada, se dice que dicho conjunto es una sucesión. Si el número de términos es limitado, la sucesión es finita, pero si el número de términos es ilimitado, lo cual se indica con puntos suspensivos, la sucesión recibe el nombre de sucesión infinita.

4. Sucesión geométrica.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ,\ a_n,\ldots$ representa a una sucesión, esta será geométrica si y sólo si el valor de la razón $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ permanece constante para toda n. El valor de dicha constante se le denomina razón común y se representa con la letra minúscula r.

5. Término general de una sucesión geométrica.

Si $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ \ldots\ ,\ a_n,\ldots$ es una sucesión geométrica con razón común r, entonces su término general está dado por la expresión $a_n = a_1 r^{n-1}$.

6. Serie geométrica.

Una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión. Si la sucesión es geométrica, entonces la serie es geométrica. Si el número de términos es limitado, la serie es finita, pero si el número de términos es ilimitado, lo cual se indica con puntos suspensivos, la serie es infinita.

7. Suma hasta el enésimo término de una serie geométrica.

La enésima suma parcial de la serie geométrica con primer término a y razón común r es $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ y $r \neq 1$.

8. Serie geométrica convergente y serie geométrica divergente.

a) Si L es un valor constante y la enésima suma parcial de una serie geométrica es tal que $\underset{n\to\infty}{S_n} \to L$, entonces la serie es convergente y su suma es igual a L.

b) Si la enésima suma parcial de una serie geométrica es tal que $\underset{n\to\infty}{S_n} \to \infty$, entonces la serie es divergente y su suma se vuelve infinita.

9. Noción de límite al infinito.

Si la función $S(n)$ es tal que $\underset{n\to\infty}{S(n)} \to L$, entonces el número L es el límite de la función $S(n)$ cuando n tiende al infinito y se escribe $\underset{x\to\infty}{lím}\ S(n) = L$. Esto último significa que conforme n tiende al infinito, los valores de las imágenes de $S(n)$ se aproximan a L más que a cualquier otro número.

10. Límites que sugieren reglas para operar con el infinito.

Si c es una constante y $k \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

1) $\underset{n\to\infty}{lím}\ n = \infty$

2) $\lim_{n\to\infty} n^k = \infty^k = \infty$

3) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\right] = \frac{1}{\infty} = 0$

4) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{1}{\infty^k} = 0$

5) $\lim_{n\to\infty} [n+c] = \infty + c = \infty$

6) $\lim_{n\to\infty} [n-c] = \infty - c = \infty$

7) $\lim_{n\to\infty} [c-n] = c - \infty = -\infty$

8) $\lim_{n\to\infty} [c\cdot n] = (c)(\infty) = \infty$, si $c > 0$

9) $\lim_{n\to\infty} [c\cdot n] = (c)(\infty) = -\infty$, si $c < 0$

10) $\lim_{n\to\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)\left(\infty^k\right) = \infty$, si $c > 0$

11) $\lim_{n\to\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)\left(\infty^k\right) = -\infty$, si $c < 0$

12) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{c}{n}\right] = \frac{c}{\infty} = 0$

13) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{c}{n^k}\right] = \frac{c}{\infty^k} = 0$

14) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{c}\right] = \frac{\infty}{c} = \infty$, si $c > 0$

15) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n}{c}\right] = \frac{\infty}{c} = -\infty$, si $c < 0$

16) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^k}{c}\right] = \frac{\infty^k}{c} = \infty$, si $c > 0$

17) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^k}{c}\right] = \frac{\infty^k}{c} = -\infty$, si $c < 0$

11. Principales reglas para el cálculo algebraico de límites al infinito.

Si $\underset{n\to\infty}{lím} f(n)=L$ y $\underset{n\to\infty}{lím} \text{g}(n)=M$, entonces:

a) Regla de la suma para límites: $\underset{n\to\infty}{lím} \left[f(n)+g(n)\right]=L+M$

b) Regla del producto para límites: $\underset{n\to\infty}{lím} \left[f(n)\cdot g(n)\right]=L\cdot M$

c) Regla del cociente para límites: Si $M\neq 0$, entonces $\underset{n\to\infty}{lím} \left[\dfrac{f(n)}{g(n)}\right]=\dfrac{L}{M}$

d) Si c es una constante, entonces $\underset{n\to\infty}{lím} c=c$ y $\underset{n\to\infty}{lím} \left[c\cdot f(n)\right]=c\cdot L$

12. Límite al infinito de una función de variable real.

Sea $f(x)$ una función de variable real, el número L es el límite de la función $f(x)$ cuando x se vuelve infinita o menos infinita que se escriben respectivamente $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=L$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=L$, si cuando x tiende al infinito o a menos infinito, las imágenes de $f(x)$ se aproximan al valor L más que a cualquier otro número. Si $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=\infty$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=\infty$, entonces se dirá que el límite es infinito. Si $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=-\infty$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=-\infty$, entonces se dirá que el límite es menos infinito.

13. Límites que sugieren reglas para operar con menos infinito.

Si c es una constante y $k\in\mathbb{Z}^{+}$, entonces:

1) $\underset{n\to-\infty}{lím} n=-\infty$

2) $\underset{n\to-\infty}{lím} n^{k}=(-\infty)^{k}=\infty$, si *k* es par

3) $\underset{n\to-\infty}{lím} n^{k}=(-\infty)^{k}=-\infty$, si *k* es impar

4) $\underset{n\to-\infty}{lím} \left[\dfrac{1}{n}\right]=\dfrac{1}{-\infty}=0$

5) $\lim_{n\to-\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{n\to-\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = \frac{1}{(-\infty)^k} = 0$

6) $\lim_{n\to-\infty} [n+c] = -\infty + c = -\infty$

7) $\lim_{n\to-\infty} [n-c] = -\infty - c = -\infty$

8) $\lim_{n\to-\infty} [c-n] = c-(-\infty) = c+\infty = \infty$

9) $\lim_{n\to-\infty} [c\cdot n] = (c)(-\infty) = -\infty$, si $c>0$

10) $\lim_{n\to-\infty} [c\cdot n] = (c)(-\infty) = \infty$, si $c<0$

11) $\lim_{n\to-\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = \infty$, si $c>0$ y k es par

12) $\lim_{n\to-\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = -\infty$, si $c>0$ y k es impar

13) $\lim_{n\to-\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = -\infty$, si $c<0$ y k es par

14) $\lim_{n\to-\infty} \left[c\cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = \infty$, si $c<0$ y k es impar

15) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{c}{n}\right] = \frac{c}{-\infty} = 0$

16) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{c}{n^k}\right] = \frac{c}{(-\infty)^k} = 0$

17) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{n}{c}\right] = \frac{-\infty}{c} = -\infty$, si $c>0$

18) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{n}{c}\right] = \frac{-\infty}{c} = \infty$, si $c<0$

19) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{n^k}{c}\right] = \frac{(-\infty)^k}{c} = \infty$, si $c>0$ y k es par

20) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{n^k}{c}\right] = \frac{(-\infty)^k}{c} = -\infty$, si $c>0$ y k es impar

21) $\lim_{n\to-\infty} \left[\frac{n^k}{c}\right] = \frac{(-\infty)^k}{c} = -\infty$, si $c<0$ y k es par

22) $\lim_{n \to -\infty} \left[\frac{n^k}{c} \right] = \frac{(-\infty)^k}{c} = \infty$, si $c < 0$ y k es impar

14. Límite de una función de variable real en un punto.

Sea $f(x)$ una función de variable real y $a \in \mathbb{R}$, el número L es el límite de la función $f(x)$ cuando x tiende a a, que se denota $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si cuando x se aproxima al número a, las imágenes de $f(x)$ se aproximan al valor L más que a cualquier otro número. Si $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$, entonces se dice que el límite es infinito. Si $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, entonces se dice que el límite es menos infinito.

15. Existencia y unicidad del límite de una función en un punto.

Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Notas:

Si existe el límite de una función en un punto, es único.

Este límite también puede ser infinito o menos infinito.

16. Principales reglas para el cálculo algebraico de límites en un punto.

Si $a \in \mathbb{R}$ y además $\lim_{x \to a} f(x) = L$ y $\lim_{x \to a} \mathrm{g}(x) = M$, entonces:

a) Regla de la suma para límites: $\lim_{x \to a} \left[f(x) + g(x) \right] = L + M$

b) Regla del producto para límites: $\lim_{x \to a} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = L \cdot M$

c) Regla del cociente para límites: Si $M \neq 0$, entonces $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$

d) Si c es una constante, entonces $\lim_{x \to a} c = c$ y $\lim_{x \to a} \left[c \cdot f(x) \right] = c \cdot L$