ANÁLISIS DE LA EXTENSIÓN DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Sugerencias al Profesor:

Trabajar únicamente con funciones polinomiales y racionales, aclarando que generalmente al bosquejar sus gráficas solo se muestra una porción de la misma, quedando en duda qué es lo que sucede en los extremos de su dominio, interrogante que es resuelta al conocer la extensión de la gráfica, la cual se deducirá a través del concepto de límite. En el caso de las funciones racionales tal análisis conducirá al concepto de asíntota horizontal que han trabajado de manera intuitiva en su curso anterior, sin embargo es conveniente retomarlo y definirlo formalmente por medio de la noción de límite al infinito o a menos infinito. Aplicar las reglas para el cálculo algebraico del límite, de manera implícita.

Propósitos:

1. Introducir el concepto de extensión de la gráfica de una función.
2. Ampliar el concepto de límite al infinito a una función de variable real.
3. Introducir los límites que permiten operar con menos infinito.
4. Reforzar el concepto de asíntota horizontal.

EL PROBLEMA DE LA EXTENSIÓN FUNCIONAL

Describe la extensión de la gráfica de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 2x^3 - 6x$

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$

Para responder, hay que examinar cómo será el comportamiento de la gráfica de cada una de las funciones en los extremos de su dominio, cuando alguno de ellos o ambos son infinitos, es decir describir el comportamiento al infinito de la gráfica.

Para cada una de las funciones del problema responde:

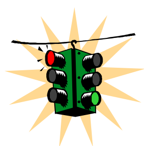
a) ¿Qué tipo de función es?
b) ¿Cuál es su dominio?

Tal vez surja la dificultad de que no todos los alumnos respondan correctamente las preguntas anteriores, así que será necesario que conjuntamente con ellos, se elabore un cuadro sinóptico donde se clasifiquen las funciones algebraicas y trascendentes estudiadas en el semestre anterior, indicando en cada caso la característica que las define así como su dominio natural.

Como el dominio de la función $f(x)=2x^3-6x$ es $\mathbb{R}$, que expresado como intervalo es $(-\infty,\infty)$, la extensión de su gráfica estará dada por los límites siguientes:

$$\underset{x\to-\infty}{lím}\left[2x^3-6x\right] \text{ y } \underset{x\to\infty}{lím}\left[2x^3-6x\right]$$

Puesto que ahora se trabajará con funciones de variable real, se deberá ampliar la noción de límite al infinito a este tipo de funciones como sigue:



Concepto clave:

Límite al infinito de una función de variable real.

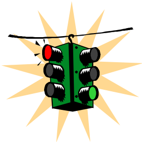
Sea $f(x)$ una función de variable real, el número L es el límite de la función $f(x)$ cuando x se vuelve infinita o menos infinita que se escriben respectivamente $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=L$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=L$, si cuando x tiende al infinito o a menos infinito, las imágenes de $f(x)$ se aproximan al valor L más que a cualquier otro número.

Si $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=\infty$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=\infty$, entonces se dirá que el límite es infinito.

Si $\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=-\infty$ o $\underset{x\to-\infty}{lím} f(x)=-\infty$, entonces se dirá que el límite es menos infinito.

Pedir a los alumnos que determinen algebraicamente los límites anteriores.

De ser necesario, aumentar a los límites al infinito que dieron lugar a reglas para operar con el infinito en la secuencia anterior, los límites correspondientes cuando n tiende a menos infinito, con el propósito de operar con menos infinito.



Concepto clave:

Límites que sugieren reglas para operar con menos infinito.

Si c es una constante y $k \in \mathbb{Z}^{+}$, entonces:

1) $\lim\limits_{n \to -\infty} n = -\infty$

2) $\lim\limits_{n \to -\infty} n^k = (-\infty)^k = \infty$, si k es par

3) $\lim\limits_{n \to -\infty} n^k = (-\infty)^k = -\infty$, si k es impar

4) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[\dfrac{1}{n}\right] = \dfrac{1}{-\infty} = 0$

5) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)^k = \lim\limits_{n \to -\infty} \left(\dfrac{1}{n^k}\right) = \dfrac{1}{(-\infty)^k} = 0$

6) $\lim\limits_{n \to -\infty} [n + c] = -\infty + c = -\infty$

7) $\lim\limits_{n \to -\infty} [n - c] = -\infty - c = -\infty$

8) $\lim\limits_{n \to -\infty} [c - n] = c - (-\infty) = c + \infty = \infty$

9) $\lim\limits_{n \to -\infty} [c \cdot n] = (c)(-\infty) = -\infty$, si $c > 0$

10) $\lim\limits_{n \to -\infty} [c \cdot n] = (c)(-\infty) = \infty$, si $c < 0$

11) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[c \cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = \infty$, si $c > 0$ y k es par

12) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[c \cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = -\infty$, si $c > 0$ y k es impar

13) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[c \cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = -\infty$, si $c < 0$ y k es par

14) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[c \cdot n^k\right] = (c)(-\infty)^k = \infty$, si $c < 0$ y k es impar

15) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[\dfrac{c}{n}\right] = \dfrac{c}{-\infty} = 0$

16) $\lim\limits_{n \to -\infty} \left[\dfrac{c}{n^k}\right] = \dfrac{c}{(-\infty)^k} = 0$

17) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n}{c}\right]=\dfrac{-\infty}{c}=-\infty$, si $c>0$

18) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n}{c}\right]=\dfrac{-\infty}{c}=\infty$, si $c<0$

19) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{(-\infty)^k}{c}=\infty$, si $c>0$ y k es par

20) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{(-\infty)^k}{c}=-\infty$, si $c>0$ y k es impar

21) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{(-\infty)^k}{c}=-\infty$, si $c<0$ y k es par

22) $\underset{n\to -\infty}{lím}\left[\dfrac{n^k}{c}\right]=\dfrac{(-\infty)^k}{c}=\infty$, si $c<0$ y k es impar

Es muy probable que en su proceso lleguen a la indeterminación $\infty-\infty$, al realizar lo siguiente:

$$\underset{x\to -\infty}{lím}\left[2x^3-6x\right]=(2)(-\infty)^3-(6)(-\infty)=-\infty-(-\infty)=-\infty+\infty$$

$$\underset{x\to \infty}{lím}\left[2x^3-6x\right]=(2)(\infty)^3-(6)(\infty)=\infty-\infty$$

Sugerir una forma distinta de proceder como estrategia para salvar tal indeterminación, como la siguiente:

$$\underset{x\to -\infty}{lím}\left[2x^3-6x\right]=\underset{x\to -\infty}{lím}\left[(x)\left(2x^2-6\right)\right]=(-\infty)\left((2)(-\infty)^2-6\right)=(-\infty)(\infty-6)$$
$$=(-\infty)(\infty)=-\infty$$

$$\underset{x\to \infty}{lím}\left[2x^3-6x\right]=\underset{x\to \infty}{lím}\left[(x)\left(2x^2-6\right)\right]=(\infty)\left((2)(\infty)^2-6\right)=(\infty)(\infty-6)=(\infty)(\infty)=\infty$$

Estos resultados definen la extensión de la gráfica de la función $f(x)=2x^3-6x$.

Apoyarse de la gráfica que aparece en la figura 1 para describir de manera verbal la extensión de la gráfica de la función.

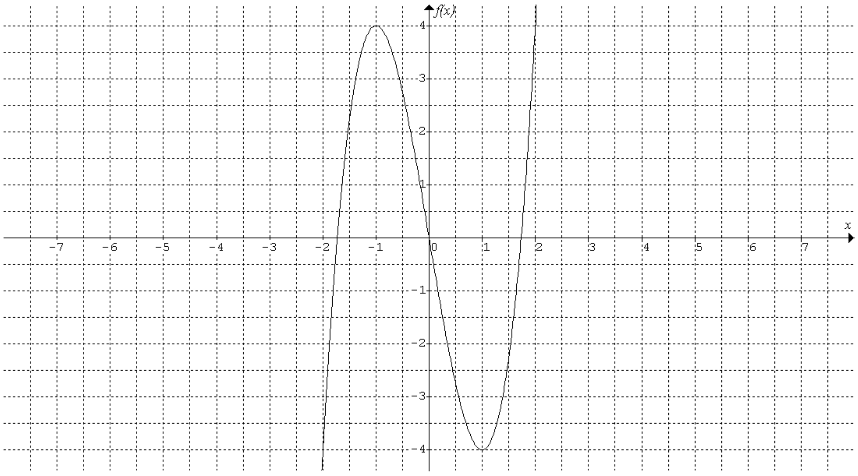


Figura 1

El primer límite indica que la gráfica de la función asciende desde la izquierda, mientras que el segundo límite dice que la gráfica va hacia arriba y a la derecha.

El dominio de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ es $\mathbb{R}$, en consecuencia la extensión de su gráfica estará definida por los límites: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{x+1}{x^2+1}\right]$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x+1}{x^2+1}\right]$.

Pedir a los alumnos que encuentren dichos límites, de donde es muy probable que surjan las indeterminaciones $\dfrac{-\infty}{\infty}$ y $\dfrac{\infty}{\infty}$, posteriormente exponer como estrategia el procedimiento algebraico que se utiliza para hallar el límite del cociente de dos polinomios cuando la variable se hace infinita:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right]=\frac{0+0}{1+0}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x+1}{x^2+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\dfrac{x}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}\right]=\frac{0+0}{1+0}=0$$

Estos resultados definen la extensión de la gráfica de la función $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

Apoyarse de la gráfica que aparece en la figura 2 para describir de manera verbal la extensión de la gráfica.

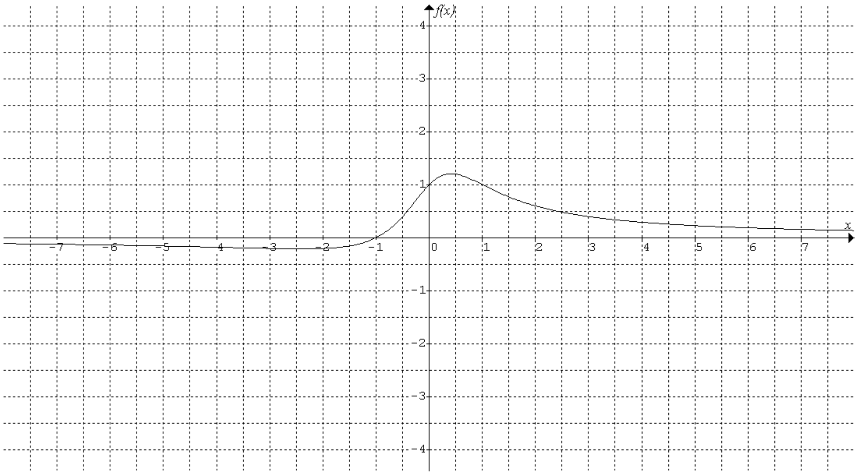
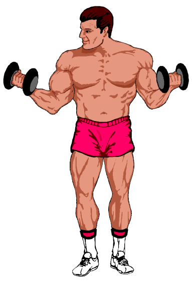


Figura 2

Ambos límites indican que conforme x se vuelve menos infinita o infinita, la gráfica de la función se aproxima indefinidamente al eje de abscisas, en otras palabras la extensión de la gráfica de la función muestra que la recta $y=0$ es asíntota horizontal de la gráfica de la función.

En general, si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ o $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$, entonces la recta $y=L$ es asíntota horizontal de la gráfica de la función $f(x)$.



Ejercicio 1

Determina la extensión de la gráfica de cada una de las funciones siguientes e indica si tiene o no tiene asíntota horizontal, en caso de tenerla escribe su ecuación. Apóyate de las gráficas que aparecen en las figuras 3 y 4, para verificar que tu respuesta es correcta.

a) $f(x)=-2x^2+3x-1$, ver la figura 3

b) $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, ver la figura 4

Al establecer el límite al infinito de la función $f(x)=-2x^2+3x-1$, es muy probable que lleguen a la indeterminación $\infty-\infty$, así que sugerir como estrategia para resolverla, que expresen la regla de correspondencia como el producto $(x)\left(-2x+3-\frac{1}{x}\right)$.

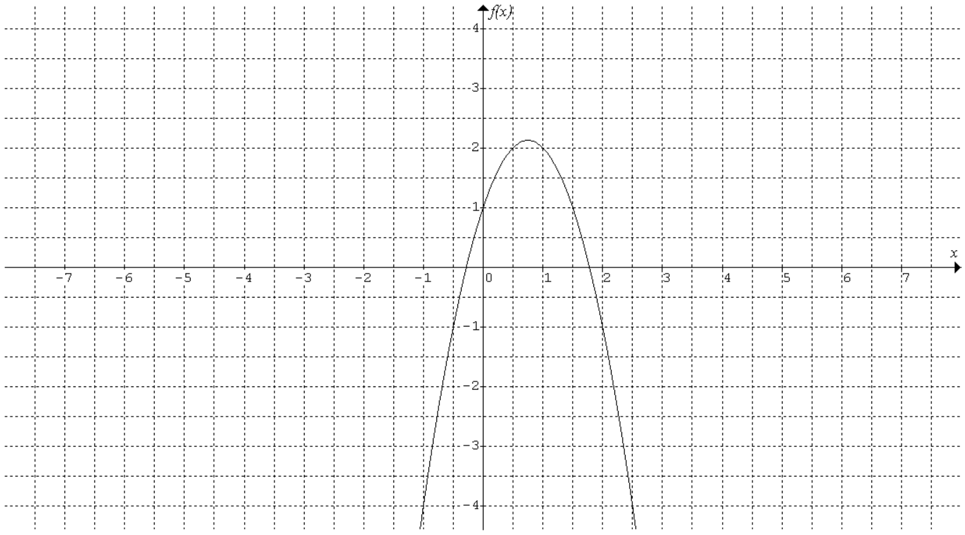


Figura 3

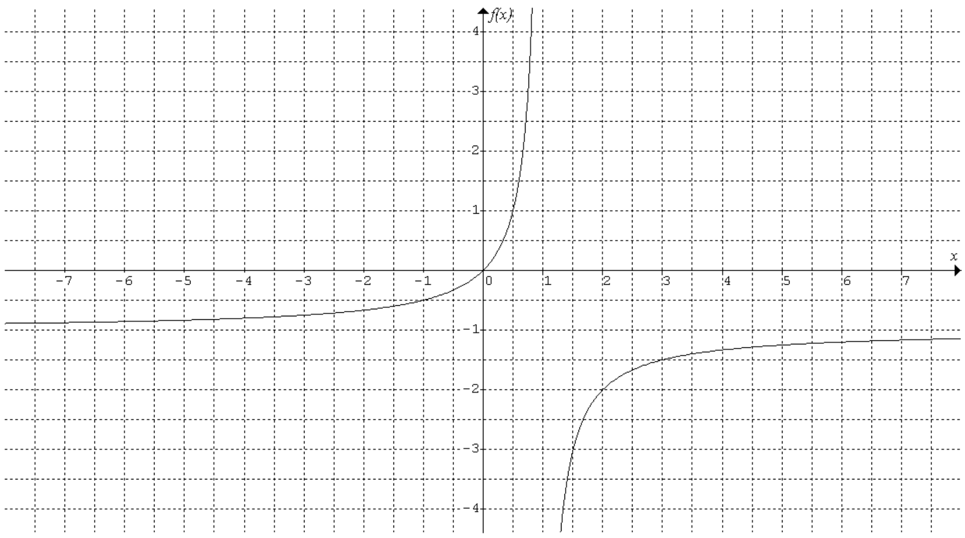


Figura 4