ESTRATEGIA DIDÁCTICA

Derivada de funciones trigonométricas

I.DATOS GENERALES

PROFESOR(A)	Armando Hernández Solís
ASIGNATURA	Cálculo Diferencial e Integral II
SEMESTRE ESCOLAR	Sexto Semestre
PLANTEL	Vallejo
FECHA DE ELABORACIÓN	10 de enero de 2011

II.PROGRAMA

UNIDAD TEMÁTICA	Unidad 1. Derivada de Funciones Trascendentes.
PROPÓSITO(S) DE LA UNIDAD	Reforzar y extender el conocimiento de la derivada a través del estudio de la variación de las funciones, trigonométricas, logarítmicas y exponenciales para cubrir situaciones que se modelan con funciones trascendentes. Retomar las relaciones entre las gráficas de una función y su derivada.
APRENDIZAJE(S)	Analiza las gráficas de las funciones seno y coseno y a partir de ellas, bosqueja la gráfica de su respectiva derivada. Identifica en cada caso la derivada respectiva de las funciones seno y coseno. Reconoce que las derivadas de las funciones trigonométricas también involucran variación periódica. Utiliza las derivadas de las funciones seno y coseno, y reglas de derivación para obtener las derivadas de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Utiliza la regla de la cadena para derivar funciones trigonométricas cuyo argumento es función de *x*. Aplica las derivadas de funciones trigonométricas a problemas diversos.
TEMA(S)	Situaciones que dan lugar a funciones trigonométricas y al estudio de su variación. Construcción gráfica y tabular de la derivada de las funciones seno y coseno. Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Regla de la cadena para funciones trigonométricas cuyo argumento es función de *x*. Aplicaciones de las derivadas de funciones trigonométricas.

III. ESTRATEGIA

Para qué el alumno tenga un conocimiento más profundo del concepto de derivada y su interpretación en el contexto de las funciones trigonométricas, se utiliza la estrategia de conjeturar resultados, para después probarlos de acuerdo al nivel del bachillerato, para posteriormente ejercitar los procesos de derivación.

IV.SECUENCIA	
TIEMPO DIDÁCTICO	Actividades 1, 2, 3, 4, dos horas en el aula. Actividad 5, dos horas de trabajo extraclase. Actividades 6, 7, 8, dos horas en el aula. Actividad 9, dos horas de trabajo extraclase. Actividades 10, 11, dos horas en el aula. Total, 10 horas.
DESARROLLO Y ACTIVIDADES	**Inicio** 1. El profesor presenta un problema, que involucra el uso de la variación de funciones periódicas. Anexo 1. El alumno contesta las peguntas del problema. 2. Como consecuencia de la actividad 1, se ve que se necesita encontrar la derivada de la función seno, por lo que se pide al alumno que la determine primero de manera gráfica y después de acuerdo a la definición de derivada. Para la parte gráfica, se le sugiere que grafique la función sen *x,* de -2π a 2 π y debajo vaya bosquejando su deriva, fijándose en múltiplos de π/4. Anexo 2. Para la parte donde aplica la definición de derivada, debe recordar el seno de la suma de dos ángulos: sen(x +y) = sen x cos y + cos x sen y, pero para el coseno necesitará cos(x + y) = cos x cos y - sen x sen y. Como se necesitará conocer o determinar $\lim_{h\to 0}\frac{sen\,h}{h}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{cos\,h-1}{h}$ Tenemos la siguiente actividad. 3. En forma tabular(manual o con software), los alumnos deben conjeturar los límites: $\lim_{h\to 0}\frac{sen\,h}{h}, \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}.$ 4. El profesor, de las actividades 2 y 3, reseña lo que se tiene hasta el momento y, formula la pregunta: ¿Cuál es la derivada de sen x ? Los alumnos deben contestar de manera inmediata que es: **cos x**. 5. El profesor, de tarea le deja a los estudiantes que, de manera análoga, obtengan la derivada de la función coseno. **Desarrollo** 6. Se retoma el problema del resorte de la actividad 1, y se contestan ahora las

	preguntas: a) Encuentra la velocidad y la aceleración en el instante t. b) Encuentra la posición, la velocidad y la aceleración de la masa en el instante t = 2π/3. ¿En qué dirección se desplaza en ese instante? ¿Está acelerando o desacelerando? 7. En las actividades de la 2 a la 5 se llegó a que $\frac{d}{dx} sen\, x = cos\, x$, $\frac{d}{dx} cos\, x = -sen\, x$ Sabiendo que $tg\, x = \frac{sen\, x}{cos\, x}$, $ctg\, x = \frac{cos\, x}{sen\, x}$, $sec\, x = \frac{1}{cos\, x}$, $csc\, x = \frac{1}{sen\, x}$ Se le pide al alumno que pruebe que $\frac{d}{dx} tg\, x = sec^2 x$ $\frac{d}{dx} ctg\, x = -csc^2 x$ $\frac{d}{dx} sec\, x = sec\, x\, tg\, x$ $\frac{d}{dx} csc\, x = -csc\, x\, ctg\, x$ 8. El profesor presenta la composición de dos funciones como (f∘g)(x) = f(g(x)). Los alumnos trabajan con loes ejercicios del anexo 3, los pares. 9. El alumno hace de tarea los ejercicios del anexo 3, los impares. 10. El alumno en base a la regla de la cadena, si **u** es una función de x, deduce las fórmulas: $\frac{d}{dx} sen\, u$ $\frac{d}{dx} cos\, u$ $\frac{d}{dx} tg\, u$ $\frac{d}{dx} ctg\, u$ $\frac{d}{dx} sec\, u$ $\frac{d}{dx} csc\, u$

	$\frac{d}{dx}u^n$ **Cierre** 11. El alumno se debe ejercitar con los ejercicios del anexo 4.
ORGANIZACIÓN	Para la actividad 1 se trabaja en forma individual. Para las actividades 2, 3 y 4 se organizarán en equipos de tres. Para las actividades 5 y 6, se trabaja de manera individual. Para las actividades 7 y 8 se organizarán en equipos de tres. Para la actividad 9 se trabaja en forma individual. Para las actividades 10 y 11 se organizarán en equipos de tres. Se considera que el trabajo se desarrolla para un grupo de 50 alumnos.
MATERIALES Y RECURSOS DE APOYO	Computadora personal. Cañón. Hojas cuadriculadas. Excel. Software Graphmatica.
EVALUACIÓN	Actividades de desarrollado en equipo, 50%. Actividades de trabajo individual, 50%.

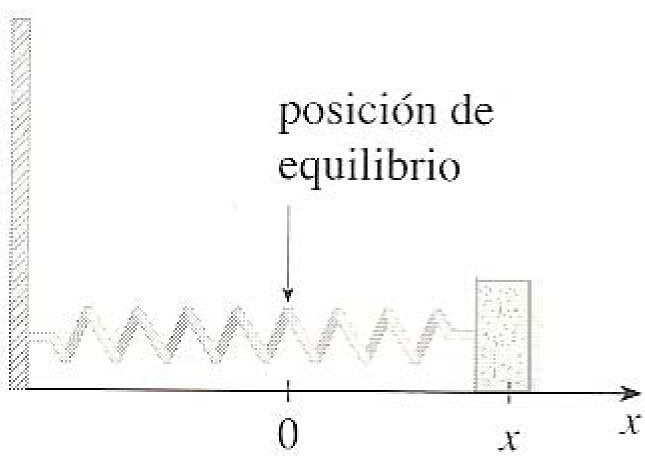
V. REFERENCIAS DE APOYO

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA PARA LOS ALUMNOS.	Bittinger, M. (2002). *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. (Séptima ed.). Colombia: Addison Wesley. James, S. (2006). *Cálculo Conceptos y Contextos.* (3ª ed.). México: International Thomson Editores, S.A., de C.V. Vitutor, Derivadas Trigonométricas, Última consulta el 5 de enero de 2006, de http://www.vitutor.com/fun/4/b_5.html
BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA PARA EL PROFESOR	Bittinger, M. (2002). *Cálculo para Ciencias Económico- administrativas*. (Séptima ed.). Colombia: Addison Wesley. James, S. (2006). *Cálculo Conceptos y Contextos.* (3ª ed.). México: International Thomson Editores, S.A., de C.V. Vitutor, Derivadas Trigonométricas, Última consulta el 5 de enero de 2006, de

	http://www.vitutor.com/fun/4/b_5.html
COMENTARIOS ADICIONALES	El proceso de derivación se debe ejercitar, por lo que si el profesor considera que es necesario, debe dejar trabajo extraclase en el que deriven la cantidad de derivadas que considere necesario, sin exagerar en la cantidad de ejercicios. Se pueden consultar las referencias dadas.

VI. ANEXOS

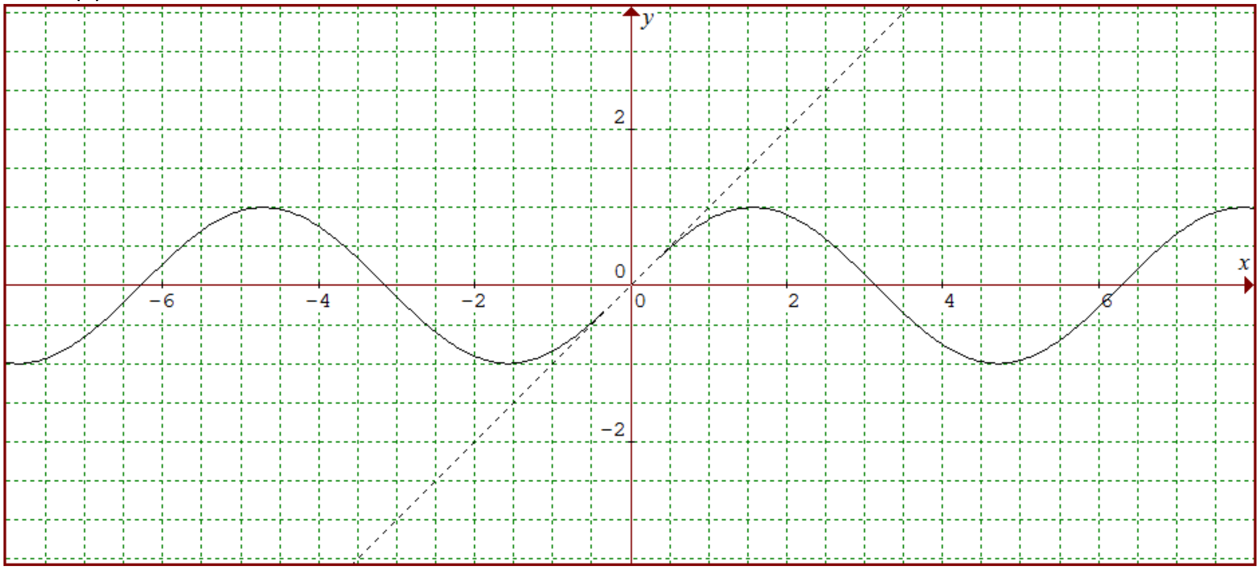
Anexo 1. Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie liza y nivelada, en un movimiento armónico simple. Su ecuación del movimiento es x(t) = 8 sen *t*, donde *t* está en segundos y *x* en centímetros.



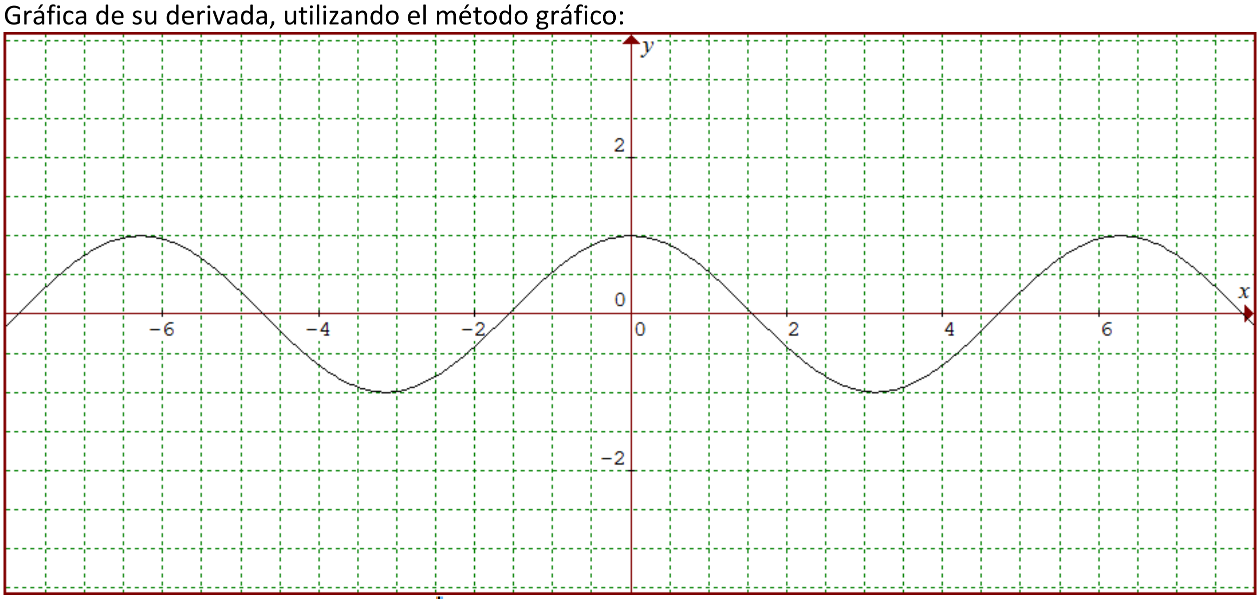
a)Para encontrar la velocidad en el instante t, ¿qué operación de cálculo diferencial necesitamos hacer?
b) Para encontrar la aceleración en el instante t, ¿qué operación de cálculo diferencial necesitamos hacer?

Anexo 2. Se debe llegar a las gráficas

Para f(x) = sen x



Gráfica de su derivada, utilizando el método gráfico:



Debe conjeturar gráficamente que $\frac{d}{dx} sen\, x = \cos x$.

Con la definición:

$$(sen\, x)' = \lim_{h\to0}\frac{sen(x+h)-sen\, x}{h} = \lim_{h\to0} sen\, x \lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h} + \lim_{h\to0}\cos x \lim_{h\to0}\frac{sen\, h}{h}$$

Se debe conjeturar además que:

$$\lim_{h\to0}\frac{\cos h-1}{h} = 0 \text{ y } \lim_{h\to0}\frac{sen\, h}{h} = 1$$

Debe conjeturar aplicando la definición que $\frac{d}{dx} sen\, x = \cos x$.

Anexo 3.

Encuentre las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, y $g \circ g$ y sus dominios.

1. $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x + 1$
2. $f(x) = 1 - x^3, \quad g(x) = 1/x$
3. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = 1 - \sqrt{x}$
4. $f(x) = 1 - 3x, \quad g(x) = 5x^2 + 3x + 2$
5. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$
6. $f(x) = \sqrt{2x + 3}, \quad g(x) = x^2 + 1$

Encuentre $f \circ g \circ h$.

7. $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad g(x) = x^2 + 2, \quad h(x) = x + 3$
8. $f(x) = \dfrac{2}{x + 1}, \quad g(x) = \cos x, \quad h(x) = \sqrt{x + 3}$

Exprese la función en la forma $f \circ g$.

9. $F(x) = (x^2 + 1)^{10}$
10. $F(x) = \operatorname{sen}(\sqrt{x})$

Anexo 4.

1. $f(x) = sen\ 4x$

$f'(x) = 4\cos 4x$

2. $f(x) = sen\ x^4$

$f'(x) = 4x^3 \cos x^4$

3. $f(x) = sen^4\ x = (sen\, x)^4$

$f'(x) = 4\, sen^3\ x\ \ \cos x$

4. $f(x) = \dfrac{\cos x}{5}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{5} sen\, x$

5. $f(x) = \cos\left(3x^2 + x - 1\right)$

$f'(x) = -(6x + 4) sen\left(3x^2 + x - 1\right)$

6. $f(x) = \dfrac{1}{2}\cos^2 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 5x)^2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos 5x \cdot (-sen\, 5x) \cdot 5 = -5\cos 5x \cdot sen\, 5x$

7. $f(x) = tg\sqrt{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x}}$$

8. $f(x) = \cot g\, 4x^2$

$$f'(x) = -\frac{8x}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

9. $f(x) = \cot g^2\, 4X = (\cot g\, 4X)^2$

$$f'(x) = -\frac{2 \cdot 4 \cdot \cot g\, 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2} = -\frac{8 \cdot \cot g\, 4X}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$$

10. $f(x) = \sec 5x$

$$f'(x) = \frac{5\ \operatorname{sen} 5x}{\cos^2 5x}$$

11. $f(x) = \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

12. $y = \operatorname{sen} ax.$ Sol. $y' = a \cos ax.$

13. $y = 3 \cos 2x.$ $y' = -6 \operatorname{sen} 2x.$

14. $s = \operatorname{tg} 3t.$ $s' = 3 \sec^2 3t.$

15. $u = 2 \operatorname{ctg} \frac{v}{2}.$ $\frac{du}{dv} = -\csc^2 \frac{v}{2}.$

16. $y = \sec 4x.$ $y' = 4 \sec 4x \operatorname{tg} 4x.$

17. $\rho = a \csc b\theta.$ $\rho' = -ab \csc b\theta \operatorname{ctg} b\theta$

18. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x.$ $y' = \operatorname{sen} x \cos x.$

19. $s = \sqrt{\cos 2t}.$ $\frac{ds}{dt} = \frac{-\operatorname{sen} 2t}{\sqrt{\cos 2t}}.$

20. $\rho = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 3\theta}.$ $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\sec^2 3\theta}{(\operatorname{tg} 3\theta)^{2/3}}.$

21. $y = \frac{4}{\sqrt{\sec x}}.$ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec x}}.$

22. $y = x \cos x.$ $y' = \cos x - x \operatorname{sen} x.$

23. $f(\theta) = \operatorname{tg} \theta - \theta.$ $f'(\theta) = \operatorname{tg}^2 \theta.$