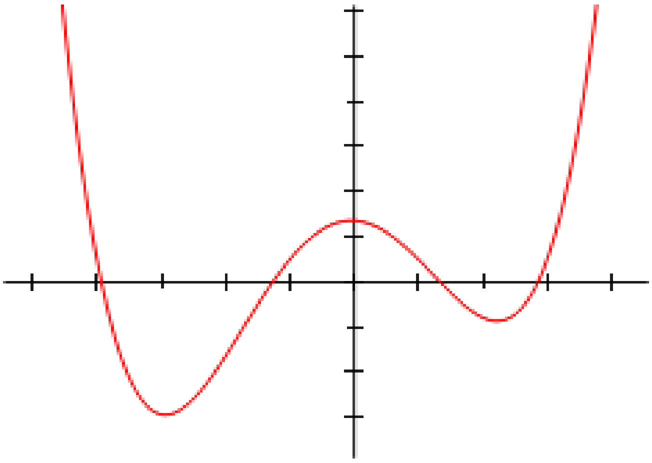
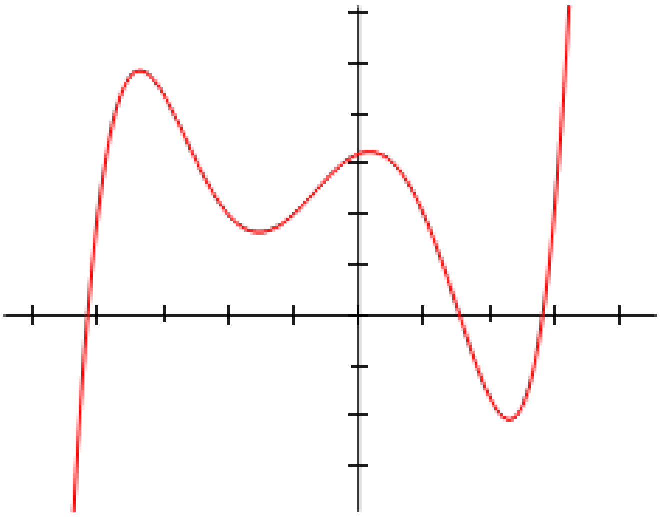
Universidad Nacional Autónoma de México
Colegio de Ciencias Y Humanidades
Academia de Matemáticas del Plantel Sur

GUÍA DE ESTUDIO PARA EL EXAMEN EXTRAORDINARIO DE MATEMÁTICAS IV (ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA)



Polinomio de grado 4

$f(x) = \frac{1}{14}(x+4)(x+1)(x-1)(x-3) + 0.5$



Polinomio de grado 5

$f(x) = 0.05(x+4)(x+2)(x+1)(x-1)(x-3) + 2$

Elaborada[1] por: Avilés Zuñiga Francisco Javier
Figueroa Torres María de Jesús
Flores Ibarra Daniel
Garrido Carmona Roberto

Septiembre de 2009

[1] Tomando como base la Guía de Matemáticas IV de la Academia de Matemáticas de noviembre de 2005.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Esta Guía de Estudio tiene como objetivo principal que el alumno sin ayuda del maestro pueda preparar su examen extraordinario de Matemáticas IV, además si el alumno no cubrió los contenidos completos de la materia sea un auxiliar en su nivelación para poder continuar en el aprendizaje de las matemáticas al cursar el quinto y sexto semestre en CCH.

Esta materia consta de cuatro unidades.

Unidad 1. F*unciones Polinomiales*

Unidad 2. Funciones Racionales y con Radicales

Unidad 3. Funciones Trigonométricas

Unidad 4. Funciones Exponenciales y Logarítmicas

Para cada tema se señalan los objetivos, se da una breve explicación del tema, se exponen ejemplos resueltos y se proponen ejercicios, algunos con sus soluciones correspondientes, al final encontrarás la bibliografía sugerida.

Instrucciones de uso

- ✓ Ten a la mano papel, lápiz y una calculadora
- ✓ Lee con cuidado (con mucho cuidado) los objetivos, las explicaciones y los ejercicios resueltos
- ✓ Elabora un resumen de lo más importante de cada unidad
- ✓ Contesta y resuelve lo que se pide
- ✓ Si tienes dudas, repasa la información de la unidad o pide ayuda en las diferentes asesorías que se dan en el plantel
- ✓ Puedes usar un paquete gráfico como herramienta para comprender mejor las funciones y sus gráficas

Con trabajo y esfuerzo lograras todo lo que te propongas.

UNIDAD 1   FUNCIONES POLINOMIALES

Propósitos: Avanzar en el estudio de las funciones, introduciendo los conceptos de notación funcional, dominio y rango. Profundizar en la comprensión de las relaciones entre la expresión algebraica de un a función polinomial, su comportamiento su aspecto y características principales de su gráfica

SITUACIONES QUE DAN LUGAR A UNA FUNCIÓN POLINOMIAL

Se trata de analizar situaciones problemáticas que nos lleven al planteamiento de una función polinomial del tipo $y = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ donde n es un número entero positivo. Se analizará también la ecuación polinomial asociada $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$.

Por la dificultad que se tiene al tratar con funciones polinomiales de grado mayor o igual a 4 (n≥4), solo se trataran problemas que lleven a funciones polinomiales de primero (lineales), segundo (cuadráticas) y tercer (cúbicas) grado.

Ejemplos resueltos

Problema 1. Juan recibe el doble del dinero que recibe Pedro más 4 pesos.

a) Escribir una relación que determine el dinero que recibe Juan si Pedro recibe 1, 2, 3, 4 o 5 pesos.

b) Escribir una relación que determine el dinero que recibe Juan si Pedro recibe x pesos.

c) ¿Qué sucede cuando Juan recibe 0 pesos?

Solución

a) Si pedro recibe 1 peso entonces Juan recibe el doble más 4 pesos, esto es

$$2(1)+4 =6$$

Si pedro recibe 2 pesos entonces Juan recibe el doble más 4 pesos, esto es

$$2(2)+4 = 8$$

De la misma manera para 3, 4 y 5 tenemos

$2(3)+4 = 10$ $2(4)+4 = 12$ y $2(5)+4 = 14$

b) Si pedro recibe x pesos entonces Juan recibe el doble más 4 pesos, esto es

$$2(x)+4 = 2x+4$$

Entonces si denotamos con y al dinero que recibe Juan cuando Pedro recibe x pesos, se tiene la función lineal

$$y = 2x+4$$

c) En este caso $y = 0$ por lo que se tiene la ecuación de primer grado $0 = 2x+4$

Problema 2. Un señor ofrece a su hijo darle un terreno, con una superficie igual a la de un rectángulo de ancho un número igual al dinero (en miles de pesos) que pueda ganar en un mes y de largo el doble del ancho, más 100 metros cuadrados.

a) Escribir una relación que determine la superficie del terreno si el hijo logra ganar 1, 2, 4, 8 o 16 mil pesos.

b) Escribir una relación que determine la superficie del terreno si el hijo logra ganar x miles de pesos.

c) ¿Qué sucede cuando el hijo logra ganar 0 miles de pesos?

Solución

a) Si el hijo gana mil pesos entonces el ancho del terreno es 1 y el largo es 2(1) por lo que la superficie del terreno es

$$1(2(1))+100 = 102 \quad \text{metros cuadrados}$$

Si el hijo gana 2 mil pesos entonces el ancho del terreno es 2 y el largo es 2(2) por lo que la superficie del terreno es

$$2(2(2))+100 = 108 \quad \text{metros cuadrados}$$

De la misma manera, cuando el hijo logra ganar 4, 8 y 16 mil pesos se tiene que la superficie del terreno que obtiene es respectivamente en metros cuadrados:

$$4(2(4))+100 = 132 \qquad 8(2(8))+100 = 228 \quad \text{y} \quad 16(2(16))+100 = 512$$

b) Si el hijo gana x miles de pesos entonces el ancho del terreno es x y el largo es 2(x) por lo que la superficie del terreno es

$$x(2(x))+100 = 2x^2+100 \quad \text{metros cuadrados}$$

Entonces si denotamos con y a la superficie del terreno que obtiene el hijo cuando logra ganar x miles de pesos, se tiene la función cuadrática

$$y = 2x^2+100$$

c) En este caso $y = 0$ por lo que se tiene la ecuación de segundo grado

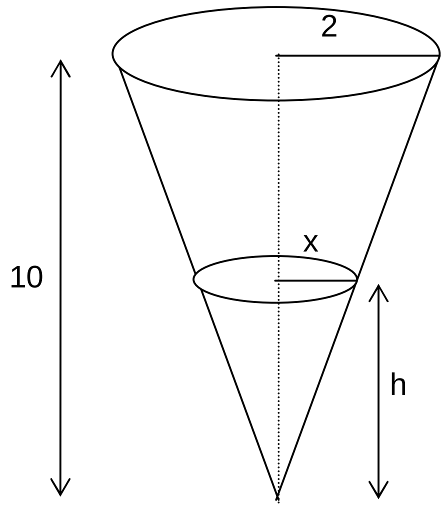
$$0 = 2x^2+100$$

Problema 3. Un tinaco tiene la forma de un cono circular recto (siguiente figura) con una altura de 10 metros y un radio de la tapa de 2 metros.

a) Calcular el volumen de agua en el tinaco, si se llena de agua hasta la altura de 1, 2, 3, 5 o 10 metros.

b) Escribir una relación que determine el volumen de agua en el tinaco, si se llena de agua hasta una altura de h metros

c) ¿Qué sucede cuando el volumen de agua en el tinaco es de 0 metros cúbicos?

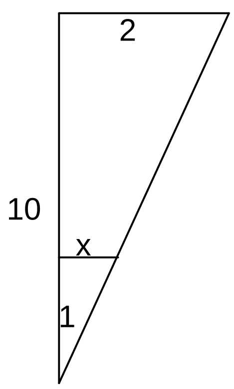


Solución

a) Recordemos que el volumen de un cono circular recto se obtiene multiplicando el área de la base A con la altura h del cono y el resultado se divide entre 3, esto es

$$V = \frac{Ah}{3}$$

Cuando la altura del agua es de un metro en la superficie se tiene un circulo de radio x. En la figura anterior se observan dos triángulos semejantes como se muestra en la siguiente figura



Como los triángulos son semejantes se tiene que

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{10}$$

Despejando la x se tiene

$$x = \frac{2(1)}{10}$$

El área A de círculo de radio x es

$$A = \pi x^2 = \pi\left(\frac{2(1)}{10}\right)^2$$

Por lo que el volumen del agua a la altura h = 1 es

$$V = \frac{A(1)}{3} = \frac{\pi\left(\frac{2(1)}{10}\right)^2 (1)}{3}$$

Haciendo las operaciones se tiene que

$$V = \frac{\pi\left(\frac{1}{5}\right)^2}{3} = \frac{\frac{\pi}{25}}{3} = \frac{\pi}{75}$$

Cuando la altura del agua es h = 2, de los triángulos semejantes se tiene

$$\frac{x}{2} = \frac{2}{10}$$

Despejando la x se tiene

$$x = \frac{2(2)}{10}$$

El área A de círculo de radio x es

$$A = \pi\left(\frac{2(2)}{10}\right)^2$$

Por lo que el volumen del agua a la altura h = 2 es

$$V = \frac{\pi\left(\frac{2(2)}{10}\right)^2 (2)}{3}$$

Haciendo las operaciones se tiene que

$$V = \frac{\pi\left(\frac{2}{5}\right)^2(2)}{3} = \frac{\frac{8\pi}{25}}{3} = \frac{8\pi}{75}$$

De manera similar para una altura del agua de 3, 5 y 10 metros se tiene

$$V = \frac{\pi\left(\frac{2(3)}{10}\right)^2(3)}{3} \qquad V = \frac{\pi\left(\frac{2(5)}{10}\right)^2(5)}{3} \qquad V = \frac{\pi\left(\frac{2(10)}{10}\right)^2(10)}{3}$$

Haciendo las operaciones se tiene que

$$V = \frac{\pi\left(\frac{3}{5}\right)^2(3)}{3} = \frac{\frac{27\pi}{25}}{3} = \frac{27\pi}{75} \qquad V = \frac{\pi\left(\frac{5}{5}\right)^2(5)}{3} = \frac{\frac{125\pi}{25}}{3} = \frac{125\pi}{75}$$

$$V = \frac{\pi\left(\frac{10}{5}\right)^2(10)}{3} = \frac{\frac{1000\pi}{25}}{3} = \frac{1000\pi}{75}$$

b) Para obtener una relación para el volumen de agua cuando se llena a una altura h, observemos los resultados obtenidos para 1, 2, 3, 5 y 10 metros.

$$V = \frac{\pi}{75} \qquad V = \frac{8\pi}{75} \qquad V = \frac{27\pi}{75} \qquad V = \frac{125\pi}{75} \qquad V = \frac{1000\pi}{75}$$

Luego para una altura de agua de h se tiene

$$V(h) = \frac{h^3\pi}{75}$$

c) Cuando el volumen de agua en el tinaco es de 0 metros cúbicos, se obtiene la ecuación cúbica

$$0 = \frac{h^3\pi}{75}$$

La cual nos dice que la altura del agua es de 0 metros.

Ejercicios

1. En el problema 1, calcular cuanto recibió Pedro si Juan recibió 308 pesos.

2. Enrique y Luis van a la ciudad. Enrique va en automóvil que es tres veces más rápido que la bicicleta utilizada por Luis.

a) Calcular el avance de Enrique si Luis avanzó 1, 3, 5, 7 o 9 kilómetros.

b) Escribe una relación que determine el avance de Enrique, cuando Luis avanza x kilómetros.

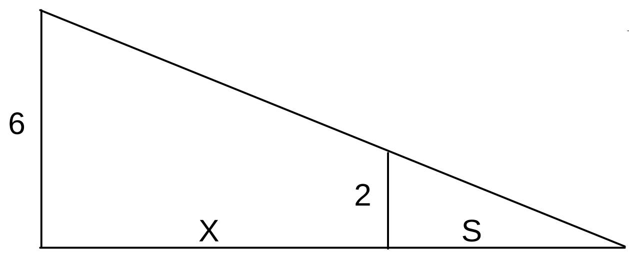
3. Anita va a la panadería a comprar bolillos de $1.50 cada uno y la encargada le cobra además $0.50 por la bolsa.

a) Calcular lo que pagó Anita si compró 1, 3, 5, 7 o 9 bolillos

b) Escribe una relación que determine lo que pagó Anita si compro x bolillos

c) ¿Cuántos bolillos compró Anita si pagó $17.00

4. Para calcular la longitud de la sombra S que produce un objeto de 2 metros de altura, cuando se coloca a una distancia x de la base de un poste de 6 metros de altura con un foco en la parte superior (figura siguiente) se utiliza la semejanza de triángulos, esto es



$$\frac{X+S}{S}=\frac{6}{2}$$

a) Calcular la longitud de la sombra cuando el objeto se coloca a 4, 8 o 12 metros de la base del poste.

b) Escribe una relación que determine la longitud de la sombra cuando el objeto se coloca a x metros de la base del poste.

5. En el problema 2, calcular:

a) La superficie de terreno que recibió el hijo, si en el mes obtuvo $15386.00

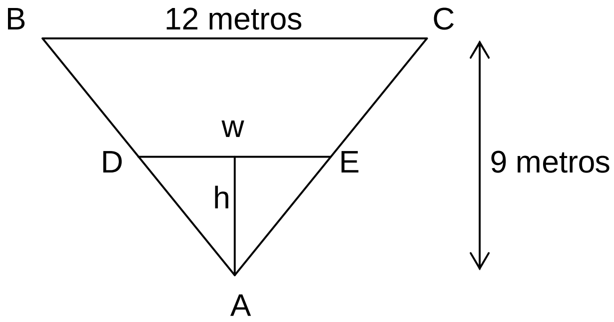
b) ¿Cuánto ganó en el mes si obtuvo un terreno con una superficie de 388 m^2.

6. En la siguiente figura, el triángulo ADE es semejante al triángulo ABC:

a) Escribir una relación que determine la base w con respecto de la altura h.

b) Calcular el área en m^2 del triángulo ADE cuando h es 1, 3 o 5 metros.

c) Escribir una relación que permita calcular el área del triángulo ADE.

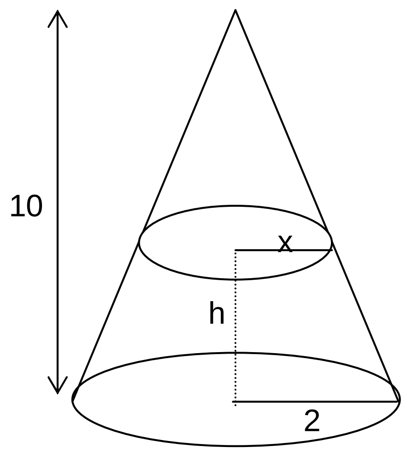


7. Un tinaco tiene la forma de un cono circular recto (siguiente figura) con una altura de 10 metros y un radio de la base de 2 metros.

a) Calcular el volumen de agua en m^3 del tinaco, si se llena de agua hasta la altura h de 1, 2, 3, 5 o 10 metros.

b) Escribir una relación que determine el volumen de agua en el tinaco, si se llena de agua hasta una altura de h metros

c) ¿Qué sucede cuando el volumen de agua en el tinaco es de 0 metros cúbicos?



Respuestas

1. 152 pesos

2. a) 3, 9, 15, 21 y 27 kilómetros respectivamente b) $y = 3x$

3. a) 2, 5, 8, 11 y 14 pesos respectivamente b) $y = 1.5x+0.5$ c) 11

4. a) 2, 4 y 6 metros respectivamente b) $y = 0.5x$

5. a) 573.46 m^2 b) \$12000.00

6. a) $w = \frac{4}{3}h$ b) $A = \frac{2}{3}(1)^2 = \frac{2}{3}$; $A = \frac{2}{3}(3)^2 = 6$; $A = \frac{2}{3}(5)^2 = \frac{50}{3}$ c) $A = \frac{2}{3}h^2$

7. a) 3.61π, 651π, 8.76π, 11.67π y 13.33π metros cúbicos respectivamente.

b) $V = \left(\frac{1000-(10-h)^3}{75}\right)\pi$ c) $0 = \left(\frac{1000-(10-h)^3}{75}\right)\pi$ y entonces h = 0

Definición de función: Se llama función a una relación de un conjunto A (dominio) a un conjunto B (contradominio) que asocia a cada uno de los elemento del dominio con un único elemento del contradominio y todos los elementos del dominio están relacionados.

Por ejemplo, asociemos a cada uno de los elementos del dominio A={-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3} con su cuadrado en el contradominio B={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, obtenemos el conjunto de parejas ordenadas {(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3,9)}. Cada pareja ordenada se formó con un elemento x del dominio y un elemento x^2 de su contradominio.

Al conjunto de elementos del contradominio que están relacionados {0, 1, 4, 9} se le llama rango o imagen de la función.

Para cada elemento x en el dominio se tendrá un único elemento f(x) en el contradominio.

A la relación algebraica que nos permite calcular para cada x del dominio un único valor f(x) en el contradominio se le llama regla de correspondencia, f(x) = x^2

Al valor de la función f(x) se acostumbra denotarlo con la letra *y* , esto es f(x) = *y*

Consideraremos otros dos ejemplos

$f(x) = 2x - 4$

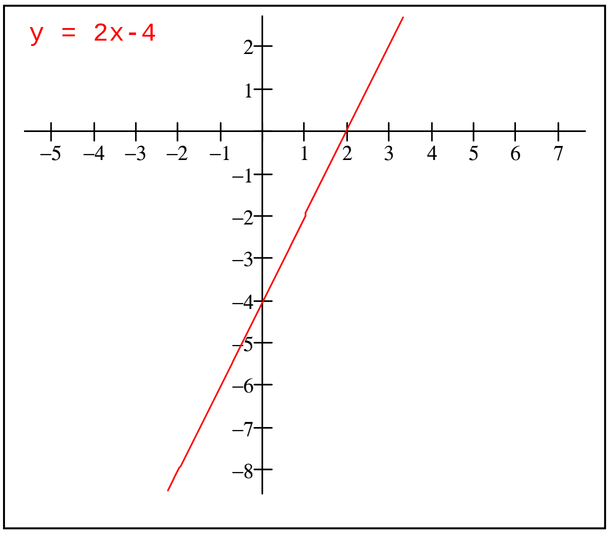
x	$f(x)$
-2	-8
0	-4
3	2

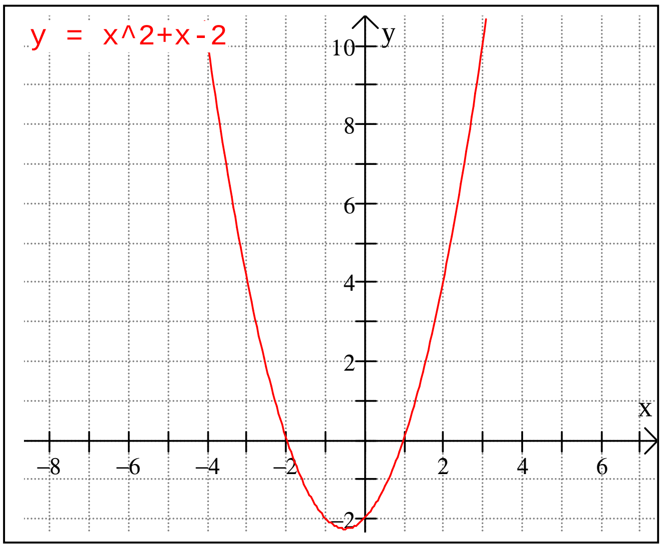
$f(x) = x^2 + x - 2$

x	$f(x)$
-3	10
0	-2
2	4
3	10

Re*alicemos su grafica.*

Si ponemos los puntos de cada una de las parejas ordenadas (x, f(x)) = (x, 2x-4) en un plano cartesiano y después los unimos con una curva "suave", se obtiene la gráfica de la función. De igual forma para las parejas ordenadas (x, x^2+x-2).





A cualquier función f se le puede asociar una ecuación f(x) = 0, en los dos ejemplos anteriores se tiene que a la función f(x) = 2x-4 se le puede asociar la ecuación 2x-4 = 0 , y a la función f(x) = x^2+x-2 se le asocia la ecuación x^2+x-2 = 0

Para calcular los ceros de la función f (x) = 0

$$\begin{aligned} &2x - 4 = 0 \\ &2x = 4 \\ &x = 2 \quad \textit{es la raíz de la ecuación} \\ &(2\,,0) \quad \textit{es el cero de la función} \end{aligned}$$

En la función de segundo grado $f(x) = x^2 + x - 2$ si hacemos que *f(x) = 0*

$$x^2 + x - 2 = 0 \qquad \textit{utilizando} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \textit{ó} \quad \textit{factorizando tenemos}$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$\textit{las raíces son} \quad x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 1 \quad \textit{y los ceros de la función son} \quad (-2\,,0) \quad y \quad (1\,,0)$$

Ejemplo 1

Sí la función de segundo grado $f(x) = x^2 - x - 6$ (parábola), se factoriza, se obtiene la ecuación

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

inmediatamente sabemos que las raíces son 3 y –2 y que los ceros de la función son (3, 0) y (-2, 0) y por lo tanto la grafica pasará por esos puntos.

Para poder graficarla localizamos el vértice, que como sabemos la función de segundo grado es una parábola y es simétrica respecto de su eje.

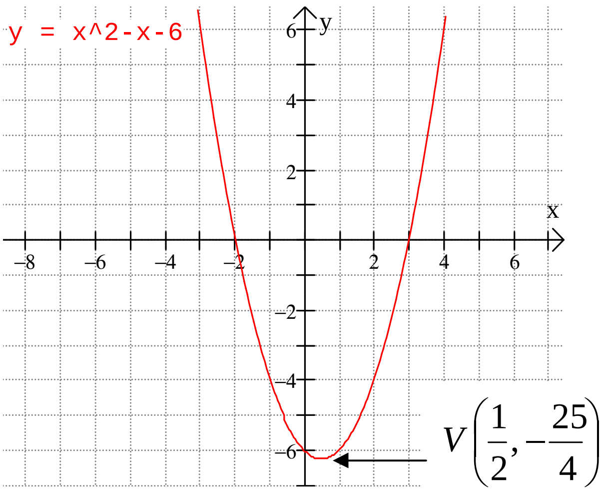
Calculamos el punto medio entre los dos ceros de la función

$$x = \frac{x_x + x_2}{2} \qquad x = \frac{3 + (-2)}{2} = \frac{1}{2}$$

y ese valor se lo damos a la función para calcular el vértice

$$f(x) = x^2 - x - 6 \qquad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right) - 6 \qquad f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 \qquad f(x) = -\frac{25}{4}$$

por lo tanto el vértice tiene como coordenadas $V\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$



Tarea 1

Obtén las raíces, los ceros de la función y la gráfica, encuentra los puntos de la grafica con los valores siguientes para *x* = –3, –2, –1, 0, 1, 2 y 3.

$a)\quad f(x) = x^2 - 4$

$b)\quad f(x) = 2x^2 - 8x$

$c)\quad f(x) = x^2 - 5x + 6$

$d)\quad f(x) = x^2 + 4x + 4$

$e)\quad f(x) = x^2 + 1$

$f)\quad f(x) = x^2 - 4x + 5$

$g)\quad f(x) = -x^2 + 6x + 8$

$h)\quad f(x) = x^2$

$i)\quad f(x) = x^3$

$j)\quad f(x) = x^4$

$k)\quad f(x) = x^5$

Nota: Debes de observar cuando la gráfica corta al eje *x*, cuando solo lo toca y cuando no toca al *eje x*.

Las gráficas cortan al *eje x* cuando el número de raíces repetidas es impar y sólo toca al *eje x* cuando el número de raíces repetidas es par.

Teorema del factor

Si r es una raíz o solución de una ecuación entonces (x – r) es un factor de dicha ecuación.

Entonces podemos construir ecuaciones de diferentes grados con raíces conocidas.

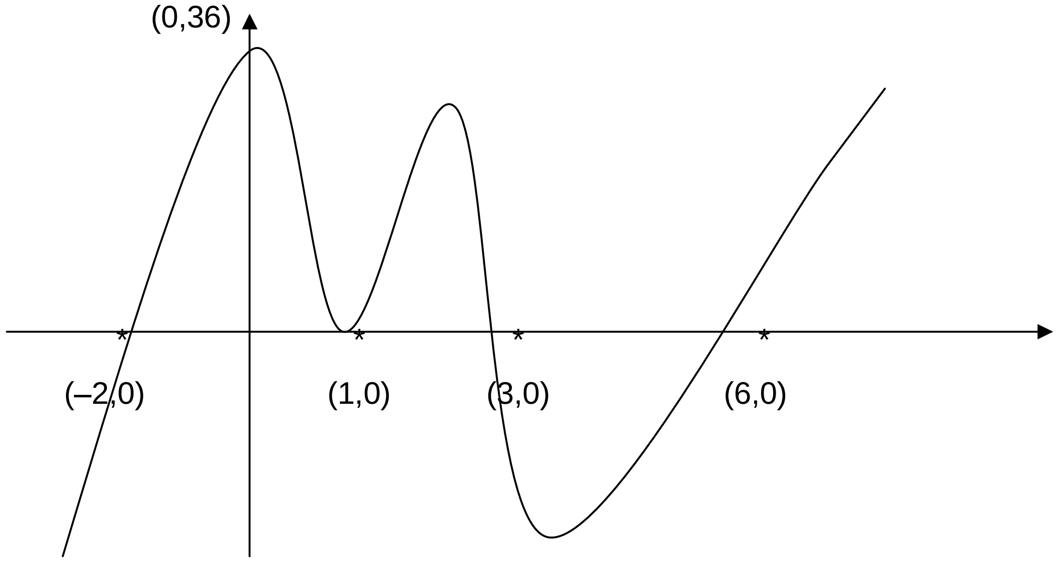
Ejemplo 2

Para las raíces siguientes, construir la función y bosquejar su gráfica

$r_1 = -2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = 3 \quad r_5 = 6$

$y = (x - (-2))\ (x-1)\ (x-1)\ (x-3)\ (x-6)$

$y = x^5 - 9x^4 + 15x^3 + 29x^2 - 72x + 36$



Para realizar la gráfica se localiza un punto como el (0, 36), los ceros de la función y de ahí se bosqueja toda la gráfica, cortando el eje de las *x* cuando sea raíz única o se repita un número de veces impar y "rebotando" cuando la raíz es doble o se repita un número de veces par.

Tarea 2

Construye la ecuación y realiza su grafica

1) $r_1 = -3 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 3$

2) $r_1 = -2 \quad r_2 = 1 \quad r_3 = 1 \quad r_4 = 4$

3) $r_1 = -3 \quad r_2 = 0 \quad r_3 = 2 \quad r_4 = 2 \quad r_5 = 5$

4) $r_1 = -3 \quad r_2 = 0 \quad r_3 = 0 \quad r_4 = 2$

5) $r_1 = -2 \quad r_2 = -2 \quad r_3 = 2 \quad r_u = 2$

6) $r_1 = 2i \quad r_2 = -2i \quad r_3 = 1$

7) $r_1 = 2 + 3i \quad r_2 = 2 - 3i$

8) *Crea una ecuacíon de sexto grado con una raíz nula o cero, dos raíces repetidas una un par de veces y otra repetida tres veces.*

Ahora a partir de una ecuación obtén los ceros y su grafica

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^3 + 5x^2 + 6x$, se iguala a cero la función

$x^3 + 5x^2 + 6x = 0$

Re*cordando el teorema del factor primero factorizamos*

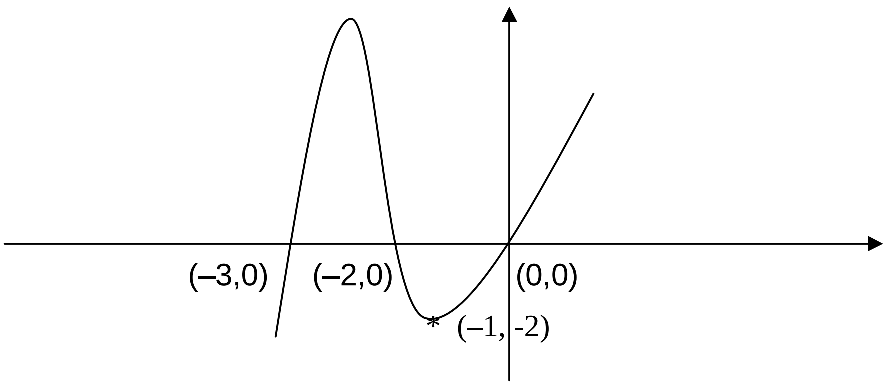
$x(x^2 + 5x + 6) = 0$

que se puede escribir

$(x - 0)\,(x^2 + 5x + 6) = 0 \quad por\ lo\ \tan to \quad r_1 = 0$

la ecuación original se simplifica a una de segundo grado que se puede factorizar o resolver con la fórmula general de segundo grado y obtenemos $r_2 = -3 \quad r_3 = -2$

El bosquejo de la gráfica de la función se realizará de manera muy sencilla, primero calculamos un valor cualquiera, por ejemplo para x = –1 se tiene (–1, –2). Se localiza en el plano junto con los ceros de la función (-3, 0), (-2, 0) y (0, 0) y se traza la gráfica.

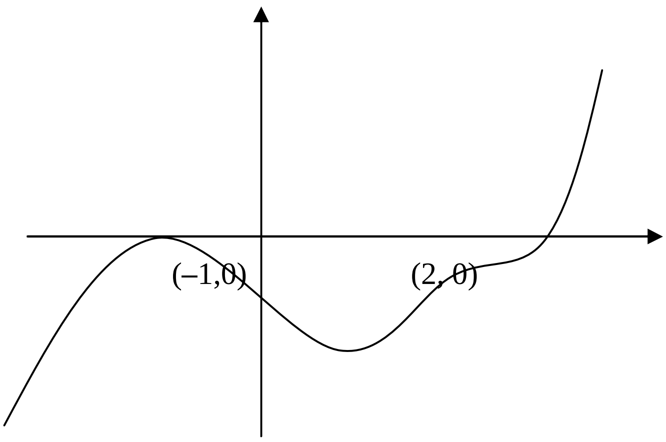


Ejemplo 3

Sea la función *f (x) = (x + 1)* ^{2} *(x – 2)* ^{3} *(x* ^{2} *+ x + 1)*

Tabla de valores.

x	y
– 2	– 64
– 1	0
0	– 8
1	– 12
2	0
3	20.8



Para comprobar que la curva corta al eje *x* basta con dar un valor más pequeño y un valor más grande que el valor de la raíz, si cambia de signo f(*x*) entonces corta el eje *x* si no cambia de signo entonces no corta el eje *x*.

Cuando en una función polinomial:

El número de raíces repetidas es par, la gráfica no corta el eje *x* (son dos raíces –1)

El número de raíces repetidas es impar, la gráfica corta al eje *x* (son tres raíces 2)

Si las raíces son números complejos, no tocan al eje de las *x*.

Teorema

Si un número complejo a+bi es raíz de una ecuación entera f(*x*)=0 con coeficientes reales, entonces su conjugado a–bi también es raíz de la ecuación.

En la ecuación anterior observamos que tiene siete raíces y que al multiplicar todos los factores nos da una ecuación de grado siete.

Teorema
Una ecuación entera f(*x*) =0, de grado n, tiene exactamente n raíces.

Pero ¿cómo? Lograríamos obtener las raíces de un polinomio de tercer grado o mayor, recordando que despejando es complicado o imposible, observemos las expresiones siguientes.

$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5) \quad \therefore r_1 = -3 \quad r_2 = -5$

$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \quad \therefore r_1 = 2 \quad r_2 = -1$

$x^2 - 6x + 8 = (x-4)(x-2) \quad \therefore r_1 = 4 \quad r_2 = 2$

Es evidente que el producto de las raíces nos resulta el término independiente.

Ahora observemos el siguiente polinomio donde las raíces son números racionales.

$6x^2 + 7x + 2 = (2x+1)(3x+2)$

$2x + 1 = 0 \qquad x = \frac{-1}{2}$

Son factores del coeficiente principal

$3x + 2 = 0 \qquad x = \frac{-2}{3}$

Son factores del término independiente

Ejemplo 4

Para el siguiente polinomio de cuarto grado

$$F(x) = (x - 2)\,(x - 1)\,(x + 2)\,(x + 3) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$$

¿Como podemos saber que esta ecuación tiene como raíz –3?

Un razonamiento sería que al sustituir –3 en la ecuación, este valor la satisface y f(x)=0.

Otro razonamiento sería que si –3 es una raíz entonces (x + 3) es un factor de dicha ecuación y por lo tanto el cociente

$$\frac{(x-2)(x-1)(x+2)(x+3)}{(x+3)} = (x-2)(x-1)(x+2)$$

Nos permite, al simplificar pasar a un polinomio de tercer grado con residuo cero

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 \ .$$

Imaginemos que la raíz es –3 y que no conocemos los factores de la ecuación. Lo que haríamos sería dividir la ecuación entre el factor (x + 3), para abreviar esto utilizaremos una división simplificada llamada sintética que se obtiene a partir de la división que todos conocemos.

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 2 & -7 & -8 & 12 & \boxed{-3} \\
 & -3 & 3 & 12 & -12 & \\
\hline
1 & -1 & -4 & 4 & 0 &
\end{array}$$

Se escriben los coeficientes de todos los términos y en vez de (x + 3) se escribe la raíz –3

Este valor es el residuo de la división, si es cero, –3 es la raíz de la ecuación

El número que representa al coeficiente principal no cambia al bajarlo a esta posición.

El procedimiento de la división seria el divisor –3 se multiplica por 1 del tercer renglón colocando el resultado en el segundo renglón segunda columna y este valor se suma con el número 2 del primer renglón y se suman resultando –1 de la misma forma el –3 se multiplica por –1 y se coloca el resultado 3 en el segundo renglón sumando este número con el –7 resultando –4 en el tercer renglón etc.

El polinomio ya reducido seria $1\,x^3 - 1\,x^2 - 4\,x + 4$ que es un grado menos que el original.

Si la volvemos a dividir ahora entre (x + 2) el polinomio ya reducido, resultaría:

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & -4 & 4 & \boxed{-2} \\ & -2 & 6 & -4 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & 0 & \end{array}$$

La ecuación nuevamente reducida seria $1\,x^2 - 3\,x + 2$

Si esta ecuación se vuelve a dividir entre otro de los factores en este caso (x – 1)

$$\begin{array}{rrr|l} 1 & -3 & 2 & \boxed{1} \\ & 1 & -2 & \\ \hline 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

Donde la ecuación reducida sería *1 x – 2 = 0* en la cual la despejamos *x* y la última raíz seria *x = 2*

Ahora con base en lo que hemos observado en el comportamiento de las ecuaciones anteriores resolvamos la ecuación siguiente

$$x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$$

Las raíces deben de ser factores de 24 ya que el coeficiente principal es 1, las raíces posibles son ± 24 ± 12 ± 8 ± 6 ± 4 ± 3 ± 2 ± 1 probando de manera arbitraria con la división sintética.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & 0 & -15 & 10 & 24 & \boxed{1} \\ & 1 & 1 & -14 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -14 & -4 & \mathbf{20} & \end{array}$$

20 es el residuo por lo tanto 1 no es una raíz

Teorema del residuo: Si el polinomio f(*x*) se divide entre *x* – *a* siendo a una constante, el residuo es igual a f (*a*)

Probemos ahora con -1

1	0	–15	10	24	$\boxed{-1}$
	–1	1	14	–24	
1	–1	–14	24	**0**	

0 es el residuo por lo tanto –1 es una raíz $r_1 = -1$

La ecuación reducida es: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

Podemos volver a dividir entre el mismo número para ver si es una raíz repetida, pero los otros números ya probados no son raíces y no se vuelven a probar.

Por lo tanto seguiremos con los siguientes números ± 2

1	–1	–14	24	$\boxed{2}$
	2	2	–24	
1	1	–12	0	

0 es el residuo por lo tanto 2 es una raíz $r_2 = 2$

La ecuación es reducida en un grado quedando de la siguiente forma

$x^2 + x - 12 = 0$

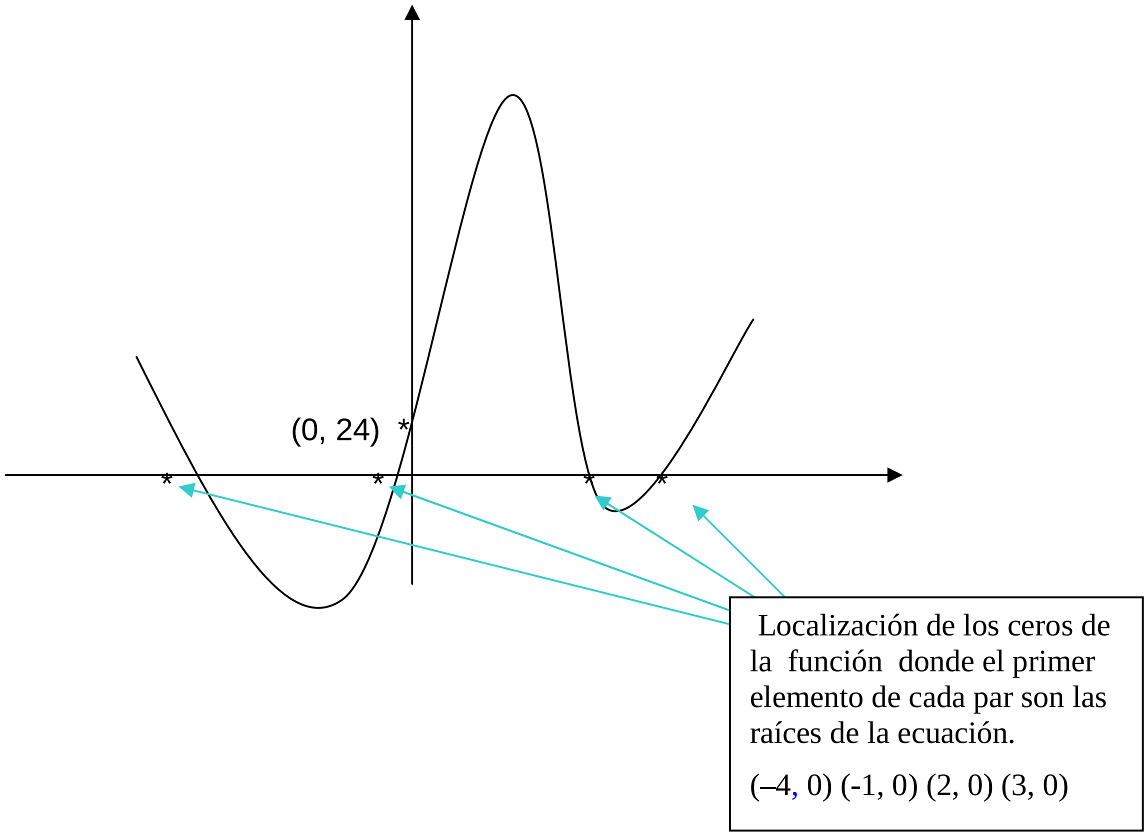
esta ecuación se puede factorizar por lo tanto

$(x+4)(x-3) = 0$

Por el teorema del factor sus raíces son $r_3 = -4$ $r_4 = 3$

raíces que se pudieron obtener por medio de la fórmula general de segundo grado

Su gráfica quedaría tentativamente de la siguiente forma, no hay precisión en los puntos que la forman pero si podemos saber donde corta al eje *x* por lo que se puede bosquejar la gráfica.



TAREA 3

Obtén los ceros de la función siguiendo los pasos del ejemplo anterior

1) $f\ (x) = x^{3} - 6x^{2} + 11x - 6$

2) $f\ (x) = x^{3} - 2x^{2} - 8x$

3) $f\ (x) = x^{4} - 5x^{2} + 4$

4) $f\ (x) = x^{5} + x^{4} - 5x^{3} - x^{2} + 8x - 4$

5) $f\ (x) = x^{4} - 2x^{3} - 7x^{2} + 20x - 12$

TAREA 4

Obtén las raíces de las ecuaciones, donde aparecen dos raíces complejas, resuelve la ecuación de segundo grado después de haber obtenido las raíces enteras.

1) $x^{3} - x^{2} - 4x + 6 = 0$

2) $x^{3} - 4x^{2} + 14x - 20 = 0$

3) $x^{4} - 6x^{3} + 14\ ^{2} - 14x + 5 = 0$

4) $x^{6} - 9x^{4} + 4x^{3} + 12x^{2} = 0$

Ejemplo 5

Obtén las raíces racionales de la ecuación siguiente $6x^2 + x - 2 = 0$

q p

$$\frac{p}{q} = \frac{2 \rightarrow}{6 \rightarrow} \qquad \frac{\pm 2 \pm 1}{\pm 6 \pm 3 \pm \ 2 \pm 1}$$

Las raíces posibles son al dividir entre ±1, ± 2 , ± 3, ± 6

Estas son $\pm 2 \ \ \pm 1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3} \pm \frac{1}{6}$

Probemos con $\frac{1}{2}$

$$\begin{array}{ccc|c} 6 & 1 & -2 & \boxed{\frac{1}{2}} \\ & 3 & 2 & \\ \hline 6 & 4 & 0 & \end{array}$$

La ecuación reducida es 6x + 4 = 0 que se puede resolver como

$$3x + 2 = 0$$
$$3x = -2$$
$$x = \frac{-2}{3}$$

Las raíces son $r_1 = \frac{1}{2}$ $r_2 = \frac{-2}{3}$

TAREA 5

Obtén las raíces de las siguientes ecuaciones, toma en cuenta el ejemplo anterior y en el ejercicio dos primero multiplica por tres para quitar los denominadores.

1) $3x^3 - 4x^2 - 35x + 12$

2) $2x^3 + \frac{29}{3}x^2 - \frac{40}{3}x + 4 = 0$

3) $9x^4 + 15x^3 - 14\ 3x^2 + 41x + 30 = 0$

4) $4x^5 - 4x^4 - 5x^3 + x^2 + x = 0$

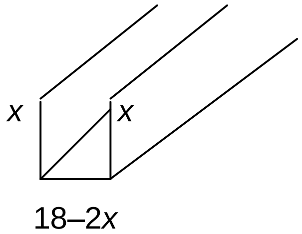
5) $x^6 - x^5 - 2x^3 - 4x^2 = 0$

6) $3x^4 - 4x^3 + 28x^2 - 36x + 9 = 0$

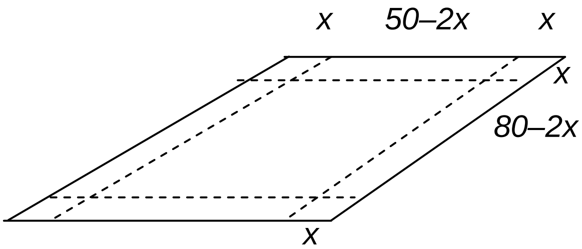
7) $6x^4 + 11x^3 - 8x^2 + 37x - 6 = 0$

Resolver los problemas siguientes planteando la función obteniendo los ceros y la grafica.

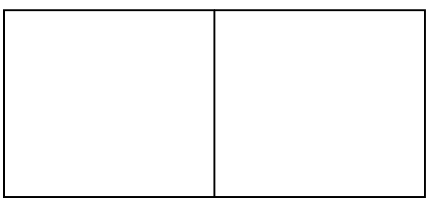
8) Se desea construir una canaleta de hojalata de sección cuadrada para desaguar el máximo de agua de lluvia de un tejado ¿qué medidas debe tener la canaleta, si se tiene una lámina de 18cm de ancho y de todo lo largo que se necesite?



9) Se tiene una lamina rectangular de hojalata que mide 80cm. por 50cm. En las esquinas deben cortarse cuadrados iguales de manera que al doblar se forma una caja sin tapa y lo que se desea saber es, de que tamaño cortamos esos cuadrados para obtener el mayor volumen posible.

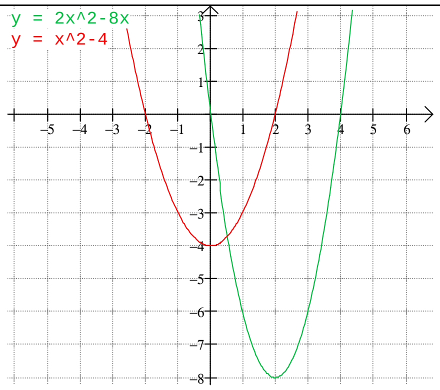
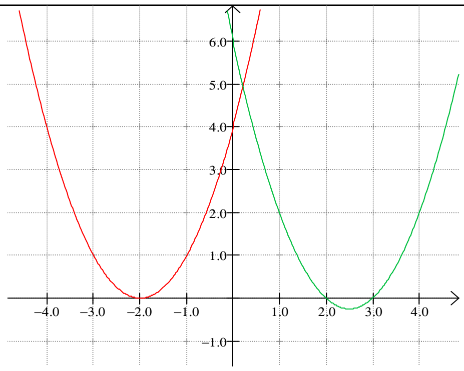
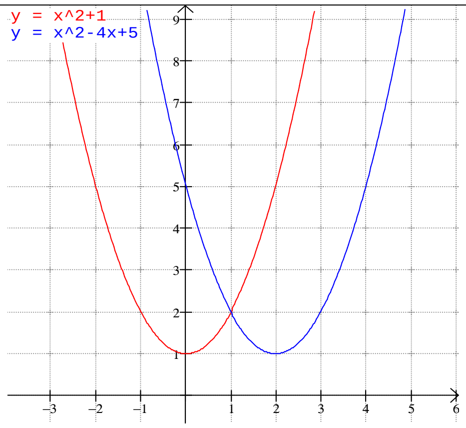


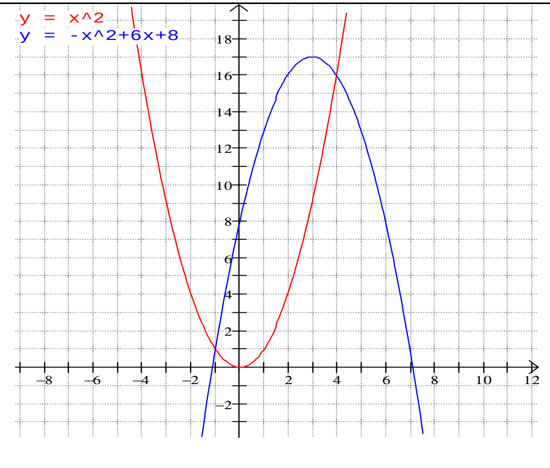
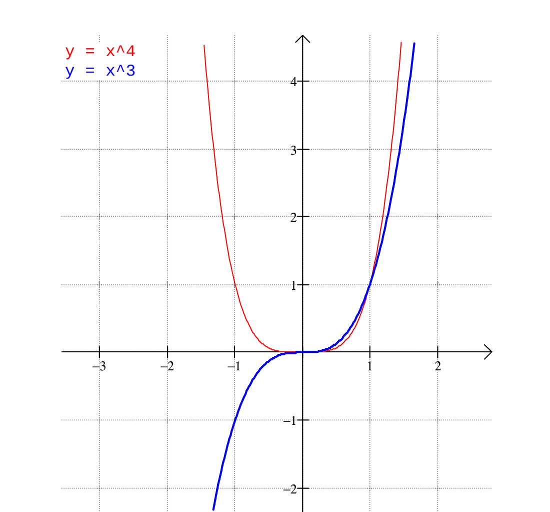
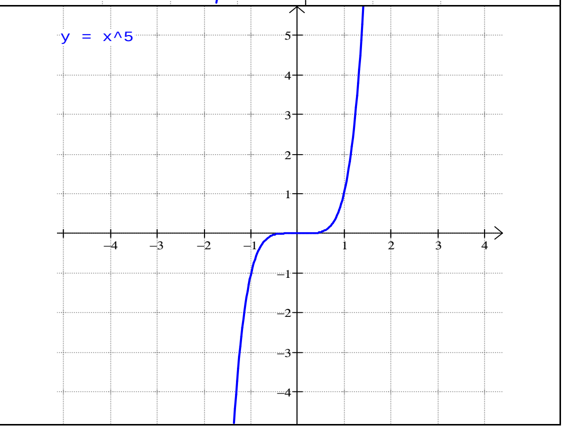
10) En un rancho una persona desea construir un par de corrales que compartan uno de sus lados, como se muestra en la figura. Se desea que tengan la mayor área posible y tiene para su construcción una malla de alambre de 30 metros de largo.



Solución a los ejercicios

Tarea 1

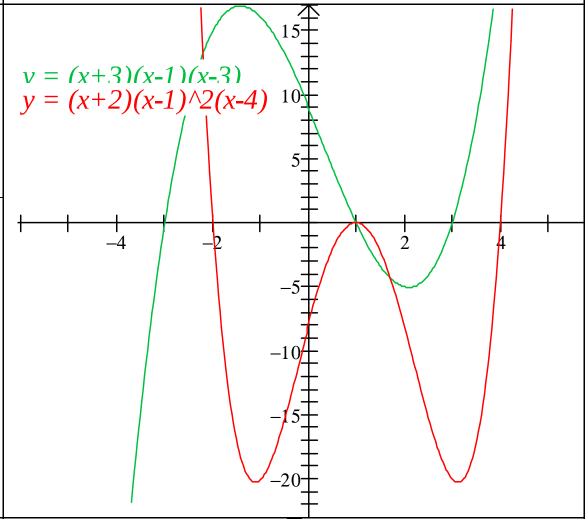
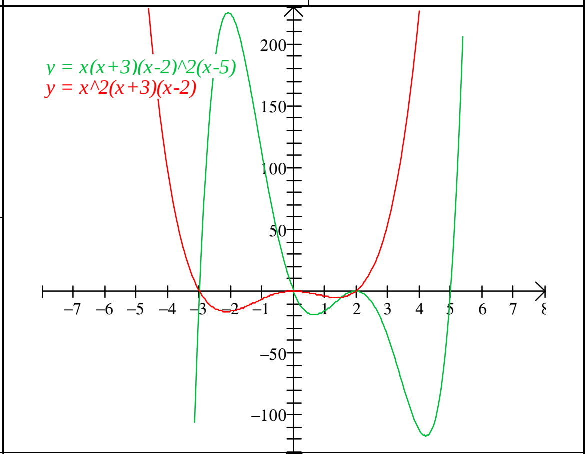
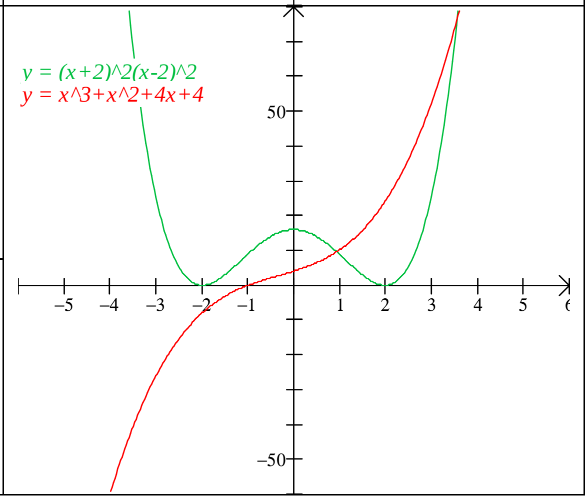
<table>
<tr><th>Inciso</th><th>Raíces
$x =$</th><th>Ceros</th><th>Gráficas</th></tr>
<tr><td>a</td><td>–2 y 2</td><td>(–2,0); (2,0)</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>b</td><td>0 y 4</td><td>(–2,0); (2,0)</td></tr>
<tr><td>c</td><td>2 y 3</td><td>(2,0); (3,0)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>d</td><td>–2</td><td>(–2,0)</td></tr>
<tr><td>e</td><td>ninguna</td><td>ninguno</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>f</td><td>ninguna</td><td>ninguno</td></tr>
</table>

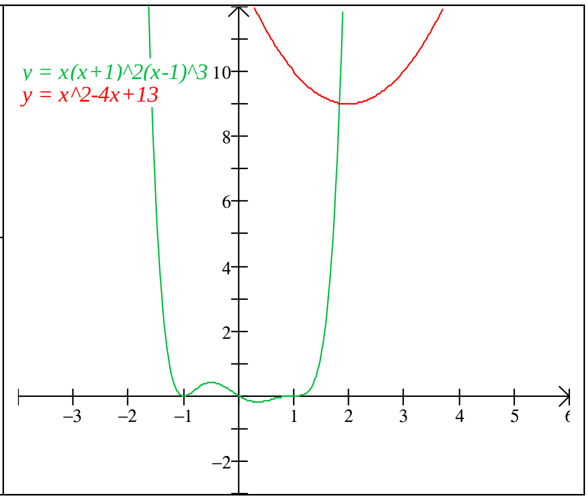
<table>
<tr><td>g</td><td>–1.123..
y 7.123…</td><td>(–1.123, 0);
(7.123, 0)</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>h</td><td>0</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>i</td><td>0</td><td>(0,0)</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>j</td><td>0</td><td>(0,0)</td></tr>
<tr><td>k</td><td></td><td>(–2,0); (2,0)</td><td>
</td></tr>
</table>

Soluciones Tarea 3

1) (3, 0), (1, 0), (2, 0)
2) (0, 0), (4, 0), (– 2, 0)
3) (–2, 0), (–1, 0), (1,0), (2, 0)
4) (1, 0), (– 2, 0)
5) (– 3, 0), (1, 0), (2, 0)

Soluciones tarea 2

<table>
<tr><th>Índice</th><th>Función f(x) =</th><th>Gráfica</th></tr>
<tr><td>1</td><td>$(x+3)(x-1)(x-3)$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$(x+2)(x-1)^2\,(x-4)$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$x(x+3)(x-2)^{\,2}\,(x-5)$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$x^{2}(x+3)(x-2)$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$(x+2)^{\,2}\,(x-2)^2$</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>6</td><td>$x^{3} + x^{2} + 4x + 4$</td></tr>
</table>

7	$x^2 - 4x + 13$	
8	$x(x+1)^2(x-1)^3$	

Soluciones Tarea 4

1) $x = -3,\ 1 + i,\ 1 - i$
2) $x = 2,\ 1 + 3i,\ 1 - 3i$
3) $x = 1,\ 2 + i,\ 2 - i$
4) $x = -3,\ -1,\ 0,\ 2$

Soluciones Tarea 5

1) $x = 4,\ -3,\ \frac{1}{3}$
2) $x = -6,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2}$
3) $x = 3,\ -5,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$
4) $x = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$
5) $x = 0,\ -1,\ \pm\sqrt{2}\, i$
6) $x = 1,\ \frac{1}{3},\ 3i,\ -3i$
7) $x = -3,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}\, i}{2}$
8) La función de área es $A(x) = x(18 - 2x)$ con $x = 4.5$ cm y $A = 40.5\ cm^2$
9) La función de volumen es $V(x) = x(50 - 2x)(80 - 2x)$

con $x = 14.7$ cm y $V = 225\ 245.3\ cm^3$

10) La función de área es $A(x) = x(30 - 3x)$ con $x = 5$m de ancho y $A = 75m^2$

UNIDAD 2 FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

Propósitos: Continuar con el estudio de las funciones, ahora racionales y con radicales. Analizar su comportamiento en el que cobra relevancia identificar su dominio de definición, su rango y los puntos de ruptura.

FUNCIONES RACIONALES

Una función f es racional si para toda *x* en su dominio existen dos polinomios *p (x) y q (x)* con *q (x)* ≠ 0 tales que

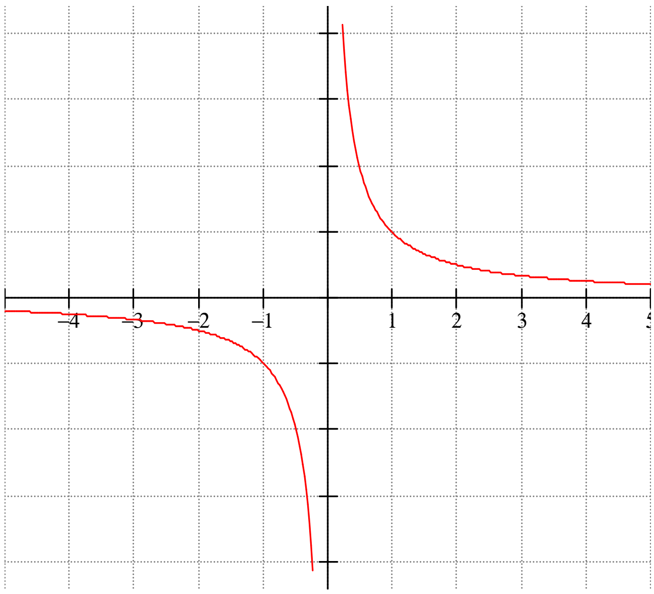
$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

Ejemplo 1. Tracemos la gráfica de la función $f(x)=\frac{1}{x}$ con x ≠ 0

Podemos observar al dar valores a *x* que *f (x)* nunca será igual a cero, por lo tanto no cortará al eje X.

Calculemos los valores de la función punto a punto para observar su comportamiento.

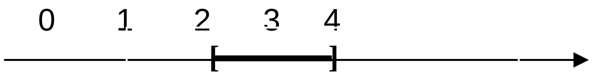
X	5	4	2	1	0.5	0.2	0.1	-0.1	-0.2	-0.5	-1	-2	-5
f(x)	0.2	0.25	0.5	1	2	5	10	-10	-5	-2	-1	-0.5	-0.2



Cuando *x* se acerca a cero por la derecha f(*x*) tiende a ∞ y cuando f(*x*) tiende a cero por la izquierda f(*x*) tiende a – ∞, cuando sucede esto a la ecuación ***x* = 0** se le llama **asíntota**

vertical de la función. Ahora si *x* tiende a ∞ f (*x*) tiende o se acerca a cero y si *x* tiende a – ∞ f(*x*) tiende o se acerca a cero, es decir se acerca a la recta ***y = 0*** y se le llama a esta **asíntota horizontal.**

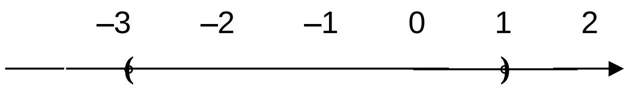
Debemos recordar los intervalos, como una notación matemática muy útil y que la necesitaremos en este tema.



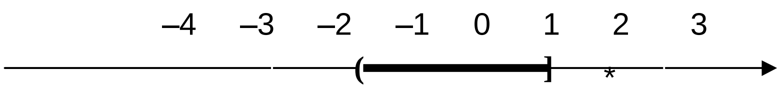
Al intervalo $[2\,,4]$ se le llama intervalo cerrado, porque incluye todos los elementos desde dos hasta cuatro, que son los extremos del intervalo.

Esto también se puede representar de la forma $2 \le x \le 4$

El intervalo desde menos tres hasta uno sin contar los extremos –3 y 1 se le llama intervalo abierto y se simboliza con paréntesis $(-3\,,1)$ y son todos los elementos entre –3 y 1 sin contar el –3 y al uno.



También hay intervalos semicerrados y semiabiertos, por ejemplo $(-2\,,1]$

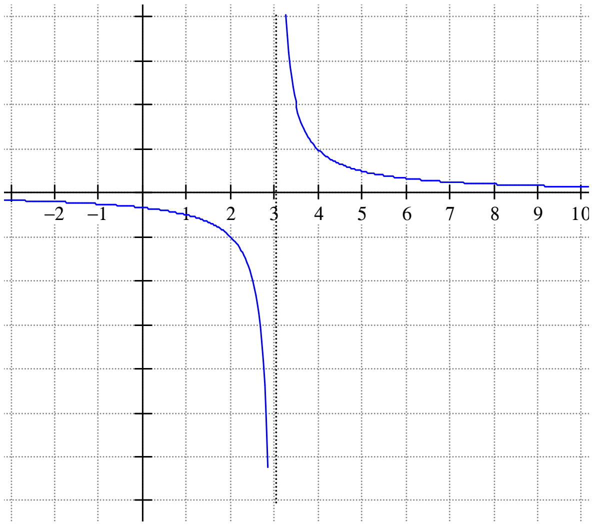


Al darle valores a *x* en la función $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ observamos, que cuando *x* = 3 el denominador se hace cero por lo tanto a *f(x)* no le corresponde ningún valor real.

Si nos acercamos a 3 por la derecha (3^{+}), *f(x)* tiende a ∞ y sin nos acercamos a 3 por la izquierda (3^{-}), *f*(*x*) tiende a – ∞, por lo tanto la ecuación ***x* = 3** es la asíntota vertical.

Para encontrar la asíntota horizontal le daríamos a *x* valores muy grandes y *f(x)* tendería al valor de la asíntota horizontal en este caso la ecuación ***y* = 0**.

Entonces, para graficar este tipo de funciones se localizan las asíntotas verticales y se da un valor menor a la asíntota y se traza la curva, se da un valor mayor a la asíntota y se traza la curva en la parte del cuadrante correspondiente.



Podemos observar que cuando *x* tiende a tres por la derecha "$x \to 3^{+}$" "$f(x) \to +\infty$" en la misma forma cuando *x* tiende a tres por la izquierda "$x \to 3^{-}$" "$f(x) \to -\infty$"

Tarea 1

Construye las graficas de las siguientes funciones, recuerda que la asíntota vertical se obtiene cuando el denominador se hace cero y completa lo que se pide.

Para graficar las funciones de los ejercicios 1,2 y 3, demos un valor a cada lado de la asíntota y tracemos la gráfica.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ 2) $f(x) = \dfrac{-5}{x+4}$ 3) $f(x) = \dfrac{2}{2x+6}$ 4) $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$

Para la grafica de la función del ejercicio 4, como se tienen dos valores que hacen cero el denominador *x* = – 2 y *x* = 3, se dan valores menores a –2 y se traza la grafica.

Después se dan tres valores, uno cercano a –2 pero mayor, otro a la mitad de –2 y 3 y otro cercano a 3 y se traza la gráfica. Finalmente se da un valor mayor a 3 y se traza la gráfica.

Tarea 2

Construye las graficas de cada función, observa que la asíntota horizontal en todas las funciones es el eje *x,* es decir *y = 0*.

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 2) $f(x)=\dfrac{-3}{x-2}$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ 4) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+x-12}$

Cuando tengamos una función racional, como $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5x+6}$

primero factorizaremos tanto el numerador como el denominador

$$f(x)=\frac{x+2}{(x+2)(x+3)}$$

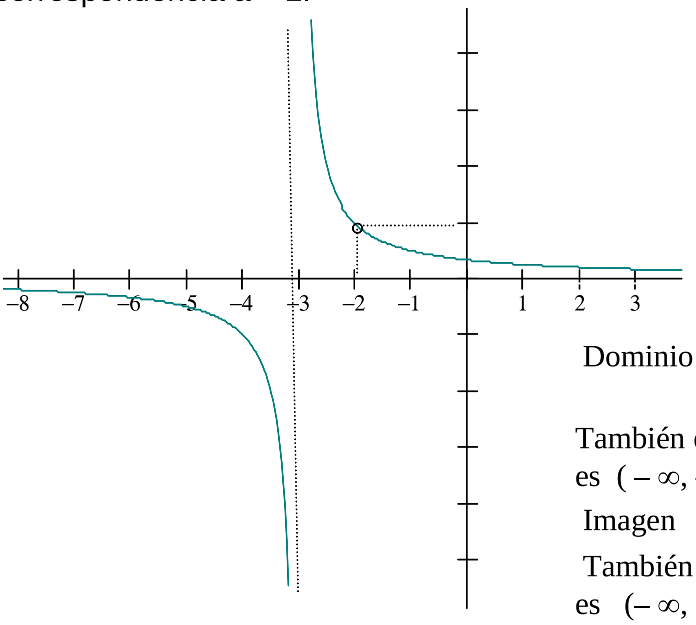
Podemos observar que para $x = -2$ obtenemos una expresión indeterminada $f(x)=\frac{0}{0}$ por lo tanto para $x = -2$ no tiene correspondencia en el eje *y*, eliminamos del numerador y del denominador ($x + 2$) y nos queda la función $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$.

Observamos que tiene una asíntota vertical en $x = -3$ y obtenemos una asíntota horizontal dando valores grandes, por ejemplo para $x = 100$, f(*x*) = .0097 y cada vez que el valor de *x* es más grande $f(x)\to 0$ por lo tanto la asíntota horizontal es ***y* = 0**.

Para el valor de $x = -2$ en la función ya simplificada le corresponde

$$f(x)=\frac{1}{x+3}=\frac{1}{-2+3}=1$$

Al punto (-2, 1) se le llama hueco de la función ya que en ese lugar de la gráfica no hay correspondencia a – 2.



Asíntota vertical x = –3

Asíntota horizontal *y* = 0

Hueco (-2, 1)

Dominio $\Re\setminus\{-3,-2\}$

También el dominio es $(-\infty,-3)\cup(-3,-2)\cup(-2,\infty)$

Imagen $\Re\setminus\{0\}$

También la imagen es $(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Tarea 3

Construye las graficas de las siguientes funciones.

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ 4) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$

Para determinar las asíntotas horizontales de una función racional, se emplea el siguiente teorema.

$$Sea: \quad f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} ... + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} ... + b_0}$$

$$Si \quad n<m \quad la\ asíntota\ horizontal\ es \quad y=0$$

$$Si \quad n=m \quad la\ asíntota\ horizontal\ es \quad y=\frac{a_n}{b_m}$$

$$Si \quad n>m \quad la\ asíntota\ horizontal\ no\ existe$$

Tarea 4

Sin graficar las funciones, determina las asíntotas verticales (*AV*), horizontales (*AH*) y los huecos.

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x^2-5x-2}$ $AV=$ ______ $AH=$ ______ $Hueco$ _______

2) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15}$ _______ ________ _______

3) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$ _______ _________ _______

Ejemplo 2

Para trazar la grafica de una función racional como $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x-6}$

Podemos seguir los pasos siguientes:

1) Factorizamos tanto numerador como denominador con las raíces del numerador la expresión completa se hace cero por lo tanto es donde corta al eje *x*.

$f(x)=\dfrac{x-1}{(x-3)(x+2)}$ **x = 3, x = –2** son las asíntotas verticales

La función corta al eje X en $x = 1$, por lo tanto es el cero de la función (1, 0) y no hay huecos.

2) Al localizar en el eje x las raíces del numerador y del denominador, se obtiene para cada intervalo determinado por estas el signo que adquiere la función en cada intervalo es decir si la función esta arriba o abajo del eje x

Para el intervalo (–∞, –2) dando un valor dentro de este intervalo, por ejemplo x = -3

$$f(-3) = \frac{-3-1}{(-3-3)(-3+2)} = \frac{-4}{(-6)(-1)} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \quad \textit{abajo del eje x}$$

Para el intervalo (–2, 1) dando un valor dentro de este intervalo, por ejemplo x = 0

$$f(0) = \frac{0-1}{(0-3)(0+2)} = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6} \quad \textit{arriba del eje x}$$

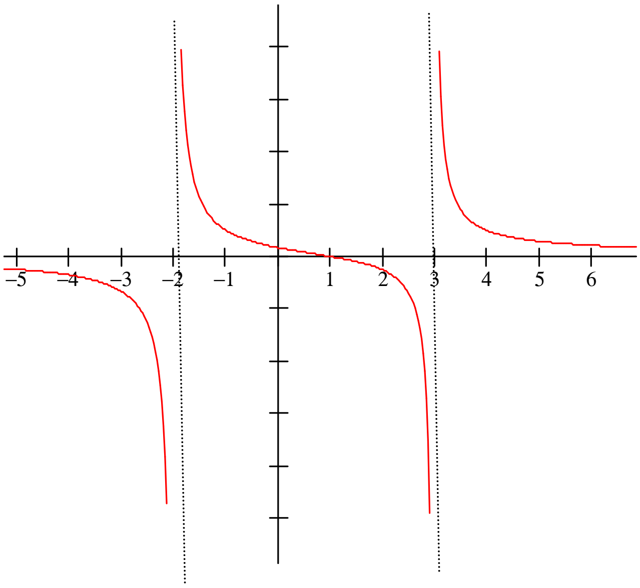
Para saber si en $x = 1$ toca o corta al eje de las x, damos un valor a x en el intervalo (1, 3), por ejemplo x = 2

$$f(2) = \frac{2-1}{(2-3)(2+2)} = \frac{1}{-4} \quad \textit{abajo del ejex}$$, entonces si corta al eje.

Dando un valor dentro del intervalo (3, ∞), por ejemplo $x = 4$

$$f(4) = \frac{4-1}{(4-3)(4+2)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$ es decir, la función está por arriba del eje *x.*

3) Con el teorema de las asíntotas horizontales obtenemos n < m por lo tanto la asíntota horizontal es $y = 0$ (el eje x), por lo que ya podemos trazar la gráfica.



El dominio es (–∞, -2) U (–2, 3) U (3, + ∞) ó $\Re \setminus \{-2, 3\}$

La imagen o rango son los números reales $\Re$

Ejemplo 3:

Grafiquemos la función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 12} \quad \textit{factorizamos} \quad f(x) = \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-4)(x+3)}$$

Obtenemos las asíntotas verticales, horizontales, huecos y ceros de la función.

Localizamos en el eje de las x las asíntotas verticales, y los ceros de la función.

¿Hay huecos? no

¿Con que valores el numerador resulta cero? 2 *y* $\frac{-1}{2}$

Por lo tanto, los **ceros de la función** son (2, 0) y $(-\frac{1}{2}, \; 0)$

¿Con que valores el denominador resulta cero? 4 y –3

Por lo tanto, las **asíntotas verticales** son $x = 4$ y $x = -3$.

Recordando el teorema de las asíntotas horizontales, ¿como es n respecto a m? **igual**

Por lo tanto la **asíntota horizontal** es ***y* = 2**

Localizamos todas las asíntotas, los ceros de la función y procedemos a graficar.

En el intervalo (–∞, –3) para *x* = –5 f (*x*) es positiva mayor a 2, trazamos la gráfica.

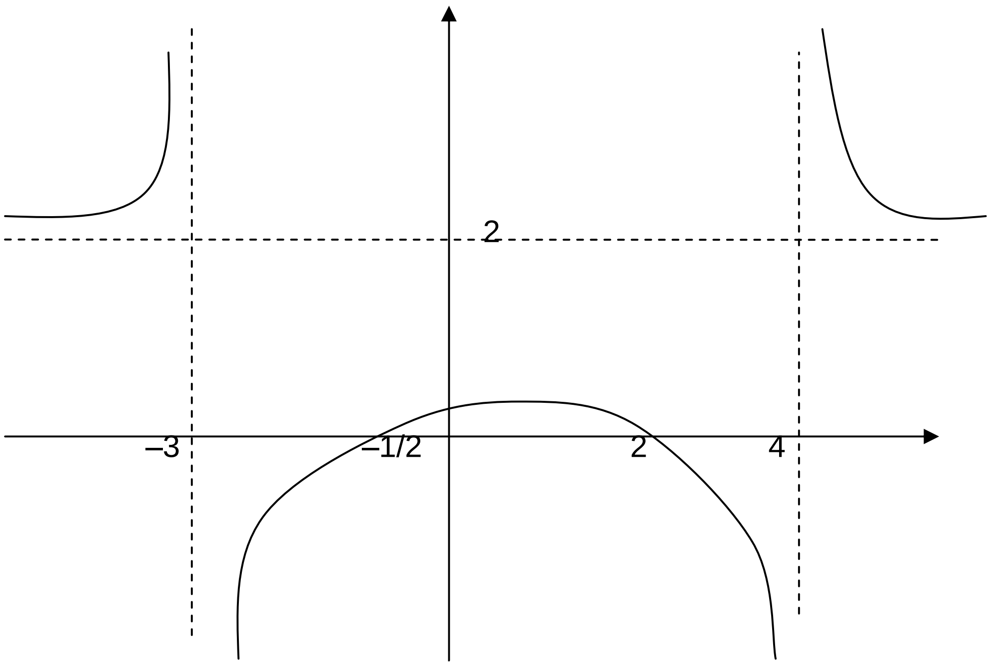
En el intervalo (–3, $\frac{-1}{2}$) para *x* = –2 f (*x*) es negativa, trazamos la gráfica.

En el intervalo (–1/2, 2) para *x* = 0 f (*x*) es positiva, trazamos la gráfica.

En el intervalo (2, 4) para *x* = 3 f (*x*) es negativa, trazamos la gráfica.

En el intervalo (4, ∞) para *x* = 5 f(*x*) es positiva mayor a dos, trazamos la gráfica.

La grafica de la función es



En este caso la asíntota horizontal no fue cortada por la gráfica pero puede ser cortada, para saber como va la grafica debemos dar tres valores entre las dos asíntotas, que es donde se presenta el corte a veces.

El Dominio $\Re - \{-3,\ 4\}$ ó (–∞, –3)U(–3, 4)U(4, +∞)

Tarea 5

Realiza las graficas de las siguientes funciones siguiendo todos los pasos, descritos anteriormente y anotando los resultados obtenidos en cada uno de ellos.

1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-2x-8}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-20}$ 3) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ 5) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-7x+10}$ 6) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{3x^2+5x-2}$

7) $f(x)=\dfrac{1}{x+5}+2$ 8) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}-3$

Para las funciones 7 y 8 se realizan las operaciones y se trabajan como las anteriores.

FUNCIONES CON RADICALES

Sea la función $f(x)=\sqrt{2x-4}$ *del tipo* $f(x)=\sqrt{ax+b}$

Para poderla graficar debemos recordar que para cada valor de *x* sólo le corresponde un único valor de *y,* por lo tanto, el valor del radical es positivo, salvo que se especifica lo contrario.

Para saber que valores acepta la función y de esa manera determinamos su dominio calculemos algunos valores

x	–2	0	2	4	10	12
f (*x*)	error	error	0	2	4	4.47..

Por lo que el dominio será $[\,2\,,\infty)$ *y la imagen* $[0\,,\infty)$

Otra forma de calcular el dominio sería expresar el subradical como una desigualdad que sea mayor o igual a cero, esto es

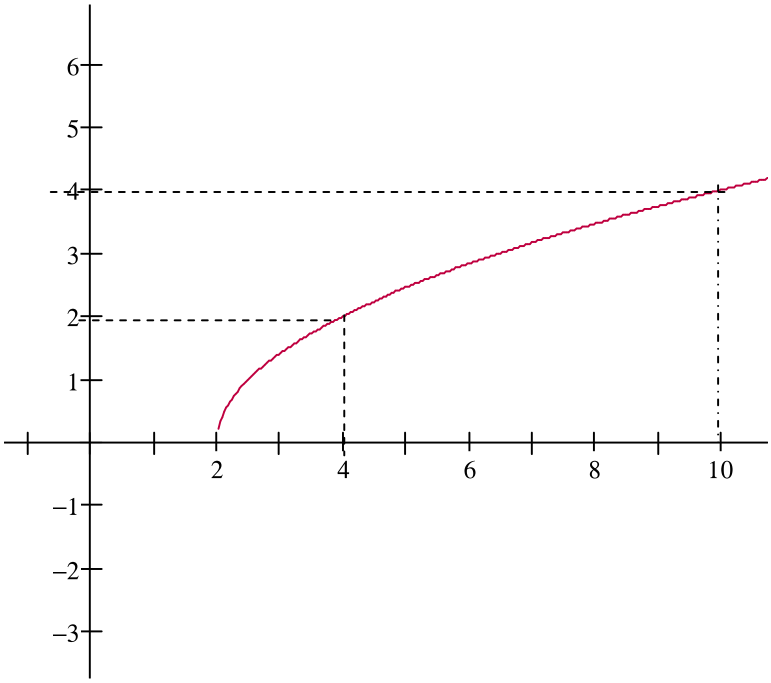
$$2x-4\ \geq 0$$

ya que la raíz de números negativos no pertenecen a los números reales, luego tenemos

$$2x-4\geq 0 \qquad 2x\geq 4 \quad x\geq\frac{4}{2} \quad x\geq 2 \quad \rightarrow \quad \text{el dominio es} \quad [2\,,\infty)$$

$$y\,la\,imagen \quad [\,0\,,\infty\,)$$

La gráfica de la función es



Tarea 6

Obtén el dominio, la imagen y la gráfica.

1) $f(x) = \sqrt{3x-4}$ 2) $f(x) = \sqrt{2x+4}$ $f(x) = \sqrt{5x-10}$

Ejemplo 4 Sea la función

$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$ *del tipo* $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ debemos de recordar que $x^2 + x - 6$ debe ser mayor que cero para que tenga raíz cuadrada por lo tanto $x^2 + x - 6 \geq 0$ factorizamos $(x+3)(x-2) \geq 0$

Para que el producto sea mayor o igual cero, ambos factores deben ser positivos, negativos o cero, esto es para el caso positivo

$(x + 3) \geq 0$ y $(x - 2) \geq 0$

$x \geq -3$ y $x \geq -2$

$[-3, \infty)$ y $[2, \infty)$

Tomando la intersección se tiene $[2, \infty)$.

Y para el caso negativo

$$(x + 3) \leq 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) \leq 0$$

$$x \leq -3 \quad \text{y} \quad x \leq 2$$

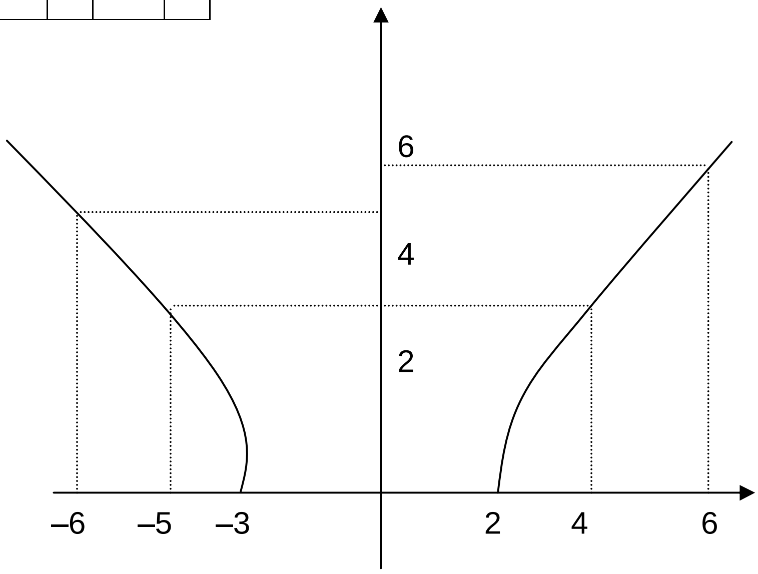
$$(-\infty, -3] \quad \text{y} \quad (-\infty, 2]$$

Tomando la intersección se tiene $(-\infty, -3]$

Al unir los intervalos resultantes obtenemos los valores que hacen verdadera la desigualdad $(-\infty, -3]$ o $[2, \infty)$ y que es, por lo tanto, el dominio de la función.

Para trazar la gráfica, calculemos algunos valores

x	–6	–5	–3	2	4	6
f(x)	4.9	3.7	0	0	3.7	6



La imagen de la función es $[0, \infty)$ y los ceros son (–3, 0) y (2, 0).

Tarea 7

Para las siguientes funciones, obtén los ceros, el dominio, la imagen y la gráfica.

1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ 3) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

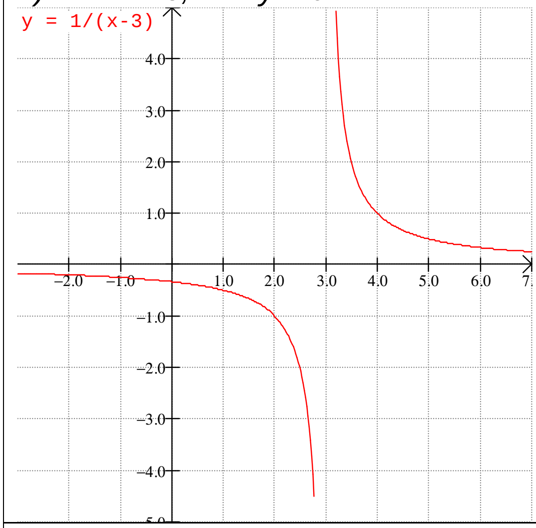
4) $f(x) = \sqrt{6x^2 - x - 2}$ 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Soluciones a los ejercicios

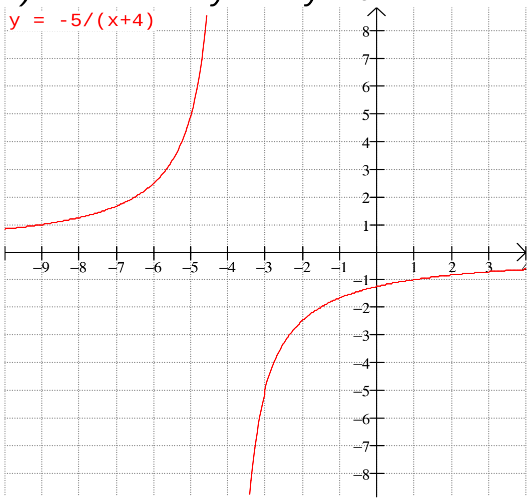
Tarea 1

1) $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ 2) $f(x)=\dfrac{-5}{x+4}$ 3) $f(x)=\dfrac{2}{2x+6}$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$

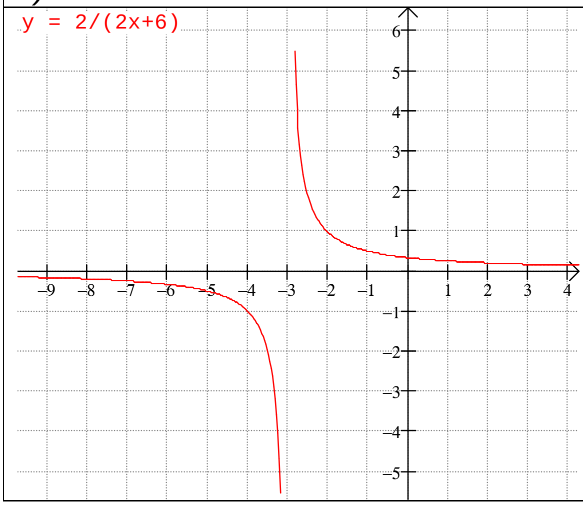
1) AV: x = 3; AH: y = 0



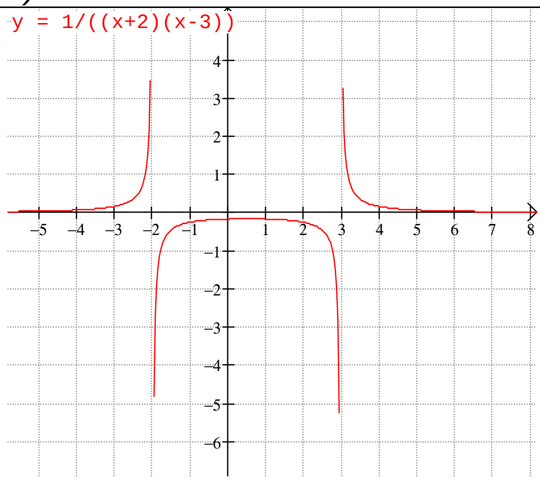
2) AV: x = –4 y AH: y = 0



3)



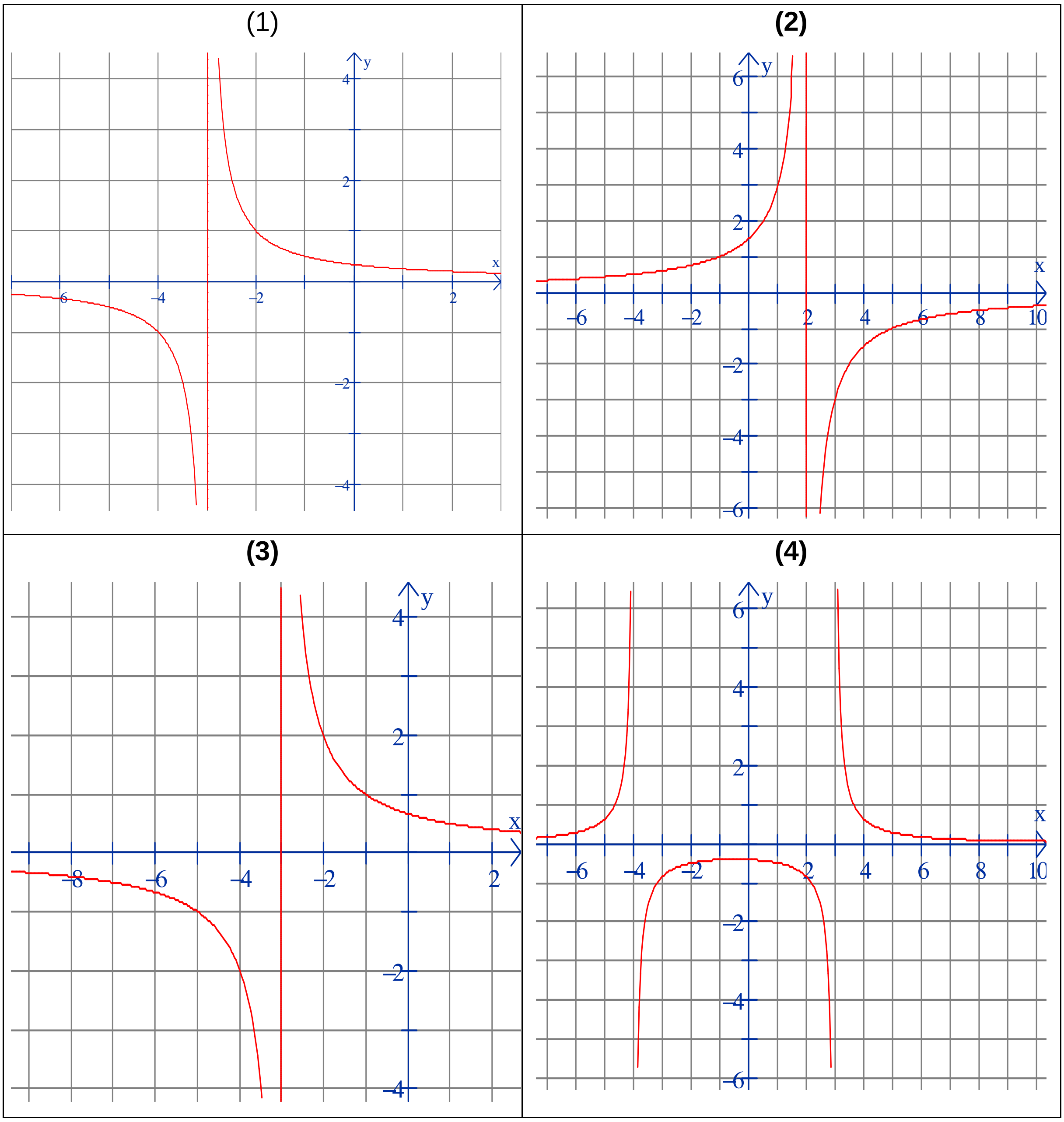
4)



Tarea 2

1) $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ 2) $f(x)=\dfrac{-3}{x-2}$

3) $f(x)=\dfrac{2}{x+3}$ 4) $f(x)=\dfrac{5}{x^2+x-12}$

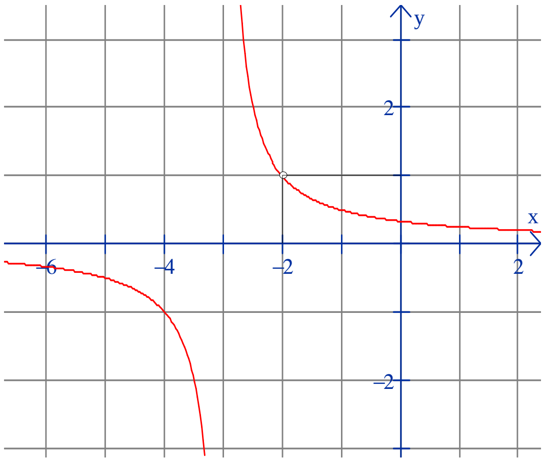


Tarea 3

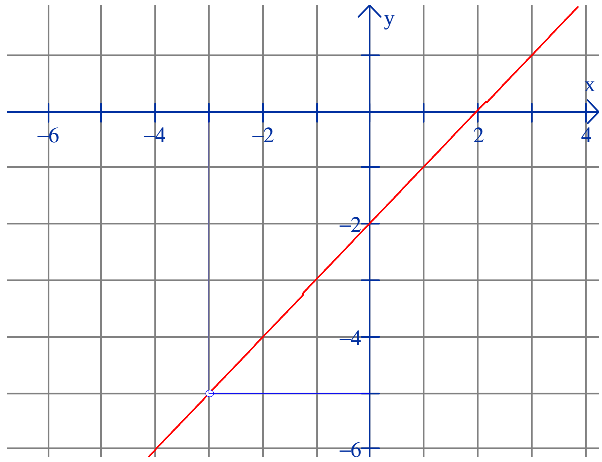
1) $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+x+6}$ 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+3}$

3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3x-4}$ 4) $f(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$

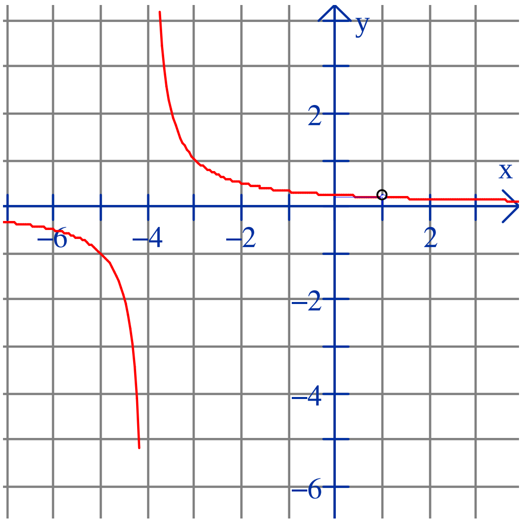
(1)



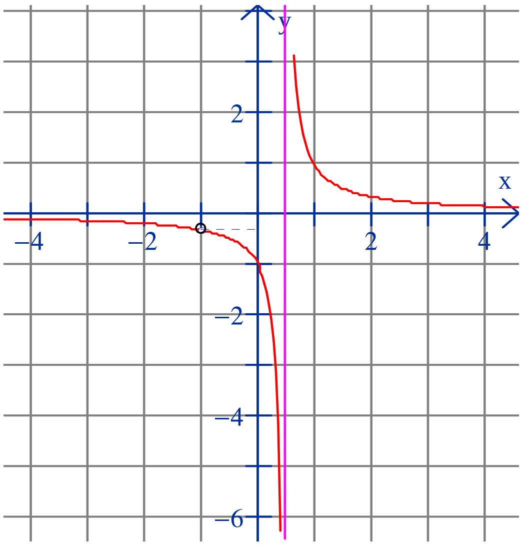
(2)



(3)



(4)



Tarea 4

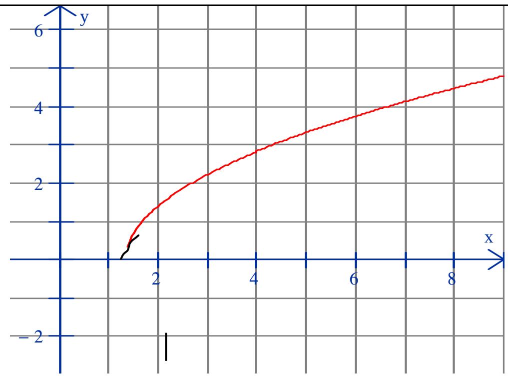
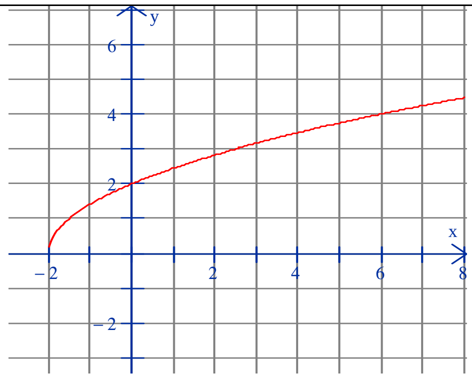
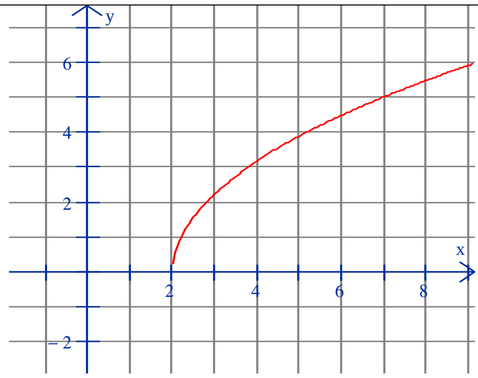
1) $f(x)=\dfrac{x-2}{3x^2-5x-2}$ $\quad AV: x=-\dfrac{1}{3}$ $\quad AH: y=0$ $\quad Hueco: \left(2,\dfrac{1}{7}\right)$

2) $f(x)=\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2+2x-15}$ $\quad AV: x=-5$ $\quad AH: y=2$ $\quad Hueco: \left(3,\dfrac{9}{8}\right)$

3) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x+2}$ $\quad AV: x=-2$ $\quad$ Ni AH ni *hueco* existen

Tarea 6

Obtén los ceros, el dominio, la imagen y la gráfica.

Función	Dominio	Rango	Gráfica
1) $f(x)=\sqrt{3x-4}$	$\left[\frac{4}{3},\infty\right)$	$[0,\infty)$	
2) $f(x)=\sqrt{2x+4}$	$[-2,\infty)$	$[0,\infty)$	
3) $f(x)=\sqrt{5x-10}$	$[2,\infty)$	$[0,\infty)$	

Tarea 7 La imagen es $[0,\infty)$ para todas las funciones.

Función	**Ceros**	**Dominio**
$f(x)=\sqrt{x^2+3x-4}$	(–1,0) y (4,0)	$[0,\infty)$
$f(x)=\sqrt{x^2-5x+6}$	(–6,0) y (1,0)	$(-\infty,-6]\cup[1,\infty)$
$f(x)=\sqrt{x^2+2x-8}$	(–4,0) y (2,0)	$(-\infty,-4]\cup[2,\infty)$
$f(x)=\sqrt{6x^2-x-2}$	$(-\frac{1}{2},0)$ y $(-\frac{1}{2},0)$	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$
$f(x)=\sqrt{x^2-4}$	(–2,0) y (2,0)	$(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

MEDIDAS EN GRADOS Y RADIANES Y ÁNGULO DE REFERENCIA

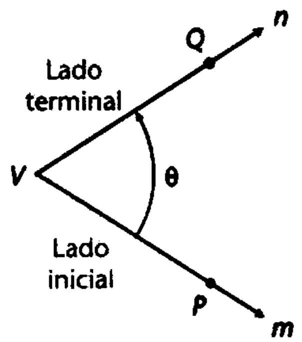
Un **ángulo** se forma girando una semirrecta, llamada **rayo**, alrededor de su origen.

Un rayo *m*, llamado **lado inicial** del ángulo, permanece fijo; un segundo rayo *n*, llamado **lado terminal** del ángulo, comienza en la posición del lado inicial y gira alrededor del **vértice** V en un plano hasta que alcanza su posición terminal.

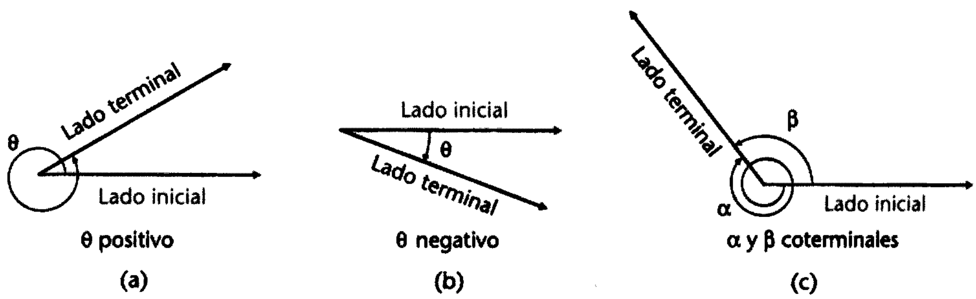
Una rotación en sentido contrario al de las manecillas del reloj produce un **ángulo positivo**, y una rotación en el sentido de las manecillas del reloj produce un **ángulo negativo**.

El tamaño de la rotación en cualquier dirección no está restringido.

Ángulo θ, ángulo PVQ o $\angle V$



Ángulos y rotación.



Para hacer la medición de un ángulo existen diversas unidades, sin embargo, en este momento solo trataremos lo referente a los grados (sexagesimales) y radianes.

El **grado** es el ángulo central subtendido por un arco de circunferencia de longitud igual a la 360ª parte de ella.

El **radián** es el ángulo central subtendido por un arco de circunferencia de longitud igual a un radio de ella.

Un ángulo puede ser medido en cualquier unidad por lo que estableceremos las equivalencias entre grados y radianes.

Dado que en una circunferencia caben 360º y 2π radianes, esta relación permite hacer las conversiones necesarias

Como $360° = 2\pi \quad radianes \Rightarrow 180° = \pi \quad radianes$

Cualquier medida en radianes se convierte a grados multiplicándola por $\dfrac{180°}{\pi \quad radianes}$

Y cualquier medida en grados se convierte a radianes multiplicándola por $\dfrac{\pi \quad radianes}{180°}$

Ejemplo 1. La medida en radianes, de un ángulo de 75°, se obtiene haciendo la multiplicación:

$$75° = 75° \times \frac{\pi \quad radianes}{180°} = \frac{75° \times \pi \quad radianes}{180°} = \frac{5}{12}\pi \quad radianes$$

Ejemplo 2. La medida en grados, de un ángulo de 5 radianes, se obtiene haciendo la multiplicación:

$$5 \quad radianes = 5 \quad radianes \times \frac{180°}{\pi \quad radianes} = \frac{5 \quad radianes \times 180°}{\pi \quad radianes} = \frac{900°}{\pi} \approx 286.4789°$$

Ejercicios:

1. El ángulo de 240°, mide:

a) $\frac{4}{3}\pi$ radianes b) $\frac{3}{4}\pi$ radianes c) $\frac{2}{3}\pi$ radianes d) $\frac{3}{2}\pi$ radianes

2. El ángulo de 135°, mide:

a) $\frac{3}{4}\pi$ radianes b) $\frac{4}{3}\pi$ radianes c) $\frac{5}{4}\pi$ radianes d) $\frac{4}{5}\pi$ radianes

3. El ángulo de 125°23’, mide aproximadamente:

a) 6.551 radianes b) 4.376 radianes c) 21.856 radianes d) 2.188 radianes

4. El ángulo de 60°, mide:

a) 3 π radianes b) $\frac{\pi}{3}$ radianes c) $\frac{\pi}{6}$ radianes d) 1 radián

5. El ángulo de 1 radián, mide aproximadamente:

a) 0.017° b) 28.64° c) 57 .29° d) 0.034°

6. Un ángulo de $\frac{7}{6}\pi$ radianes, mide:

a) $\left(\frac{1080}{7}\right)\pi^0$ b) $\left(\frac{1080}{7}\right)^0$ c) 210π° d) 210°

7. El ángulo de 225°, mide:

a) $\frac{3\pi}{4}$ radianes b) $\frac{\pi}{4}$ radianes c) $\frac{5\pi}{4}$ radianes d) $\frac{7\pi}{4}$ radianes

8. El ángulo de 300°, mide:

a) $\frac{10\pi}{3}$ radianes b) $\frac{5\pi}{3}$ radianes c) $\frac{5\pi}{6}$ radianes d) $\frac{7\pi}{6}$ radianes

9. El ángulo de $\frac{\pi}{2}$ radianes, mide:

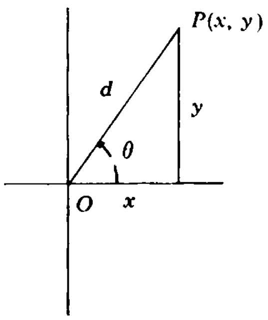
a) 180º b) 100º c) 90º d) 45º

10. El ángulo de $\frac{5}{6}\pi$ radianes, mide:

a) 180º b) 100º c) 150º d) 120º

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS PARA UN ÁNGULO CUALQUIERA

Si tenemos un ángulo θ colocado entre 0° y 90° con lado inicial en el eje *x*, un punto cualquiera (distinto del origen) que tiene las *coordenadas (x, y)* en el *lado terminal* de θ y llamamos *d* a la distancia del origen al punto *P(x, y)*, entonces:



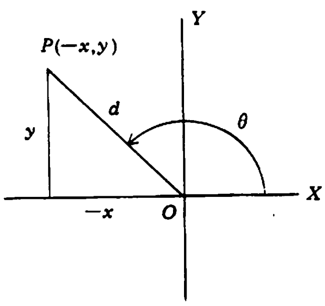
$$sen\,\theta = \frac{ordenada}{distancia} = \frac{y}{d} \qquad csc\,\theta = \frac{1}{sen\,\theta} = \frac{distancia}{ordenada} = \frac{d}{y}$$

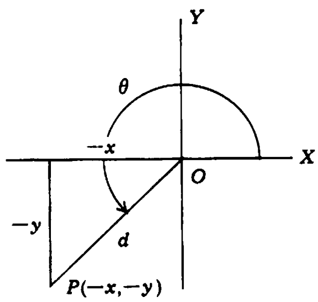
$$cos\,\theta = \frac{abscisa}{distancia} = \frac{x}{d} \qquad sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta} = \frac{distancia}{abscisa} = \frac{d}{x}$$

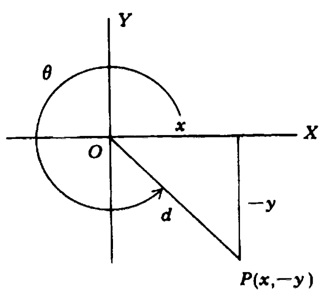
$$tan\,\theta = \frac{ordenada}{abscisa} = \frac{y}{x} \qquad cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta} = \frac{abscisa}{ordenada} = \frac{x}{y}$$

$$0° < \theta < 90°$$

Las definiciones anteriores de las funciones trigonométricas se han dado en función de *x* y de *y*; estas variables pueden tomar valores positivos y negativos, según el cuadrante de los ejes cartesianos donde se encuentre el punto P (la distancia *d* siempre se considera positiva).







En la tabla se resumen los signos de las funciones en los cuatro cuadrantes.

	Signo en el cuadrante			
Funciones	I	II	III	IV
sen	+	+	-	-
csc	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
sec	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

El **ángulo de referencia** α es el ángulo *agudo* positivo entre el lado terminal de θ y el eje horizontal.

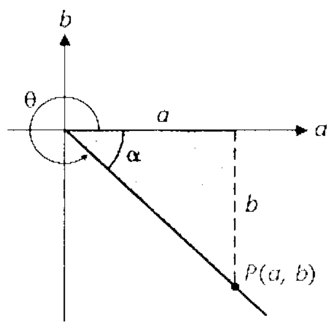
$(a, b) \neq (0,0)$

α es positivo

En el **II** cuadrante el ángulo de referencia tiene por valor $180° - \theta$ ("lo que falta para 180º").

En el **III** cuadrante, el ángulo de referencia será $\theta - 180°$ ("lo que se pasa de 180º").

En el **IV** cuadrante el ángulo de referencia será $360° - \theta$ ("lo que falta para 360°").



Para ángulos negativos se utiliza:

sen (– θ) = – sen θ

cos (– θ) = cos θ

tan (– θ) = – tan θ

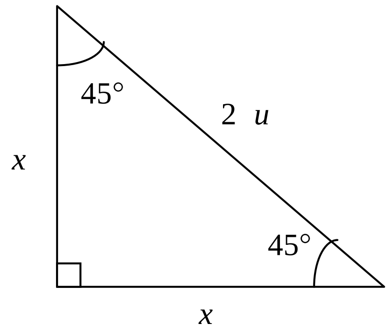
Se pueden obtener los valores de las funciones trigonométricas de algunos ángulos, sin necesidad de utilizar una calculadora, partiendo de:

En el triángulo rectángulo isósceles de la siguiente figura, se tiene que la hipotenusa mide 2 u, los ángulos agudos miden $45°$ cada uno y los catetos tienen la misma longitud.

Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene

$$x^2 + x^2 = 2^2 \;\Rightarrow\; 2x^2 = 4 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{4}{2} \;\Rightarrow\; x^2 = 2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{2}$$

Que es la longitud de cada uno de los catetos.

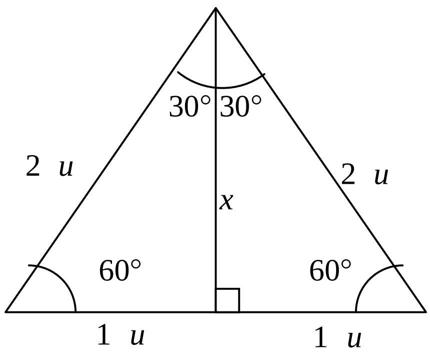


En el triángulo equilátero de la siguiente figura, se trazó una de sus alturas, obteniendo dos triángulos rectángulos congruentes con ángulos agudos de $30°$ y $60°$, hipotenusa de 2 *u* y cateto adyacente al ángulo de $60°$ de $1\ u$ y cateto opuesto igual a *x*.

Para obtener el valor de *x* se utiliza el teorema de Pitágoras

$$x^2 + 1^2 = 2^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4 - 1 \Rightarrow \quad x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}$$

x es el cateto adyacente al ángulo de $30°$



Ejemplo 3

Veremos como se pueden utilizar los ángulos de referencia para determinar los valores de las funciones trigonométricas.

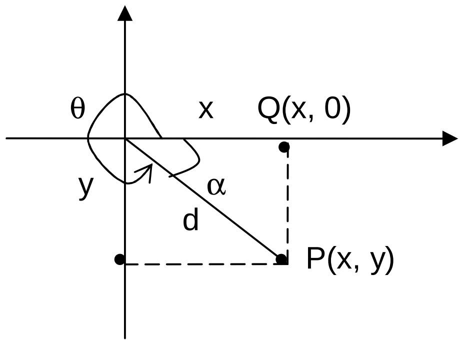
Si θ es un ángulo, cuyo ángulo de referencia es α , entonces

$$0° < \alpha < 90°, \qquad \text{o bien} \qquad 0° < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Si P(x, y) es un punto en el lado terminal de θ y Q(x, 0) es un punto en el eje X.

Para calcular el valor de una función trigonométrica de θ, determine su valor para el ángulo de referencia α y anteponga el signo adecuado.

Utilizaremos la figura siguiente para obtener el valor de senθ, cosθ y tanθ si θ = 315°.



Como θ = 315° su ángulo de referencia α = 45°, θ esta en el cuadrante IV luego

$$\text{sen}\theta < 0,\ \cos\theta > 0 \ \text{ y } \ \tan\theta < 0$$

Entonces de acuerdo con la tabla de resumen de signos anterior, se tiene

$$\text{Sen}315° = -\,\text{sen}45° = -\,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Cos}315° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315° = -\tan 45° = -1$$

Tomando en cuenta la información anterior y considerando un triángulo rectángulo con hipotenusa y catetos de longitud dada en la siguiente tabla, se puede construir una tabla de valores de las funciones trigonométrica para los ángulos de 0°, 30°, 45°, 60° y 90°.

Ángulo(α)		Longitud del cateto opuesto	Longitud del cateto adyacente	Longitud de la hipotenusa
Grados	Radianes			
0°	0	0	1	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	1	$\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}$	1	2
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	1

Ángulo α		Sen α	Cos α	Tan α	Cotan α	Sec α	Cosec α
Grados	Radianes						
0º	0	0	1	0	N.D.	1	N.D.
30º	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45º	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
60º	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90º	$\frac{\pi}{2}$	1	0	N.D.	0	N.D.	1

N.D. (no definido)

Ejemplo 4

Para calcular las razones trigonométricas de ángulos mayores de 90º, se hace con referencia a las de los ángulos agudos, así:

Si el ángulo θ = 150°, su ángulo de referencia será 180° – 150° = 30°

Si el ángulo θ = 240°, su ángulo de referencia será 240° – 180° = 60°

Si el ángulo θ = 300°, su ángulo de referencia será 360° – 300° = 60°

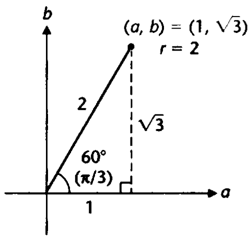
Ejemplo 5

Calcular el valor de las razones trigonométricas para el ángulo de 135°.

Como θ =135°, el ángulo de referencia será 180° – 135° = 45°, entonces

$$sen\,135° = sen\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 135° = -\tan 45° = -1$$

Ejemplo 6 Utilizar la siguiente figura, para determinar el valor de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente de un ángulo de 60º*.



$$sen60° = sen\frac{\pi}{3} = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{a}{r} = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Ejercicios

1. El ángulo de referencia para 420°, es

a) 45° b) 90° c) 30° d) 60°

2. El ángulo de referencia para $\frac{7}{6}\pi$, es

a) $\frac{\pi}{6}$ b) π c) 6π d) $\frac{\pi}{3}$

3. El ángulo de referencia para 315°, es

a) 45° b) 90° c) 15° d) 60°

4. El ángulo de referencia para $\frac{2}{3}\pi$, es

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{3}$π c) $\frac{2}{3}\pi$ d) $\frac{\pi}{3}$

5. El ángulo de referencia para 150°, es:
a) 45° b) 90° c) 30° d) 60°

6. El ángulo de referencia para $\frac{11}{6}\pi$, es:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{5}{6}\pi$ c) $\frac{2}{3}\pi$ d) $\frac{\pi}{3}$

7. El ángulo de referencia para 240°, es:
a) 45° b) 15° c) 30° d) 60°

8. El ángulo de referencia para $\frac{3}{4}\pi$, es:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{\pi}{6}$

9. El ángulo de referencia para $\frac{5}{4}\pi$, es:

a) $\frac{\pi}{4}$ b) π c) 5π d) $\frac{\pi}{2}$

10. El ángulo de referencia para $\frac{5}{3}\pi$, es:

a) $\frac{\pi}{6}$ b) π c) 6π d) $\frac{\pi}{3}$

11. El *seno* de 210°, es:

a) -2 b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. El *coseno* de 210º, es:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) –2 d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

13. El *seno* de 120°, es:

a) 2 b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

14. El *coseno* de 225°, es:

a) –2 b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

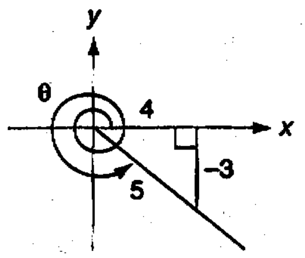
15. El *seno* de 330º, es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$

16. La *tangente* de $-\frac{5}{4}\pi$, es:

a) – 1 b) 1 c) $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

17. En la figura, la *tangente* del ángulo θ, es:



a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $-\frac{4}{3}$

18. El *seno* de 300º, es:

a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. El *coseno* de 300°, es:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{1}{2}$

20. El *coseno* de – 315°, es:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DIRECTAS

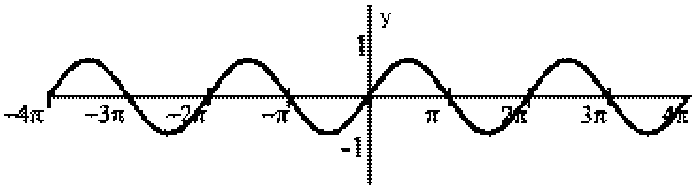
Debido a la existencia en la naturaleza de una gran cantidad de sucesos que tienen, como el de las ondas sonoras, un comportamiento repetitivo, es decir, un comportamiento periódico y a que las funciones trigonométricas son las más adecuadas para describir esos fenómenos, estudiaremos ahora las gráficas de las funciones trigonométricas básicas.

Gráfica de la función *y = sen x*.

Periodo: 2π. Dominio: Todos los números reales.

Rango: [-1,1]. Simétrica con respecto al origen.

x	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Sen x	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0

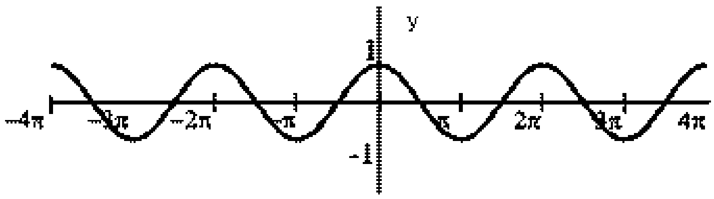


Gráfica de la función *y = cos x*.

Periodo: 2π. Dominio: Todos los números reales.

Rango: [-1,1]. Simétrica con respecto al eje *y*.

x	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Cos x	1	0.86	0.5	0	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0	0.5	0.86	1



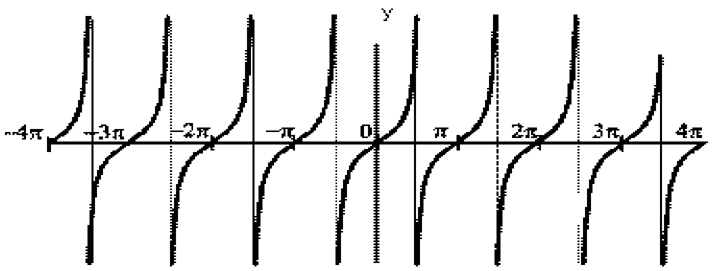
Gráfica de la función *y = tan x*.

Periodo: π.   Dominio: Los números reales excepto $\frac{\pi}{2}$ + kπ, donde k es un número entero.

Rango: Todos los números reales.   Función creciente entre las asíntotas.

Simétrica con respecto al origen. Discontinua en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un entero.

x	0	π/6	π/3	π/2	2π/3	5π/6	π	7π/6	4π/3	3π/2	5π/3	11π/6	2π
Tan x	0	0.6	1.7	ND	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	ND	-1.7	-0.6	0



ND (no definido)

Análisis de los parámetros de la función trigonométrica

Para construir y analizar las gráficas de funciones trigonométricas debemos hacer un estudio sobre los parámetros que intervienen en ellas.

Consideremos una función trigonométrica de la forma

$$y = A \text{ sen } (Bx + C) + D$$

El valor máximo que toma la función trigonométrica *y* = *A* sen (Bx + C) es la amplitud $|A|$

El valor del ángulo para el cual se tiene un ciclo completo es el periodo, para la función trigonométrica *y* = *A* sen (Bx) es $\frac{2\pi}{|B|}$

El corrimiento horizontal $\left|\frac{C}{B}\right|$ desplazamiento de fase.

Si $\frac{C}{B} > 0$, la gráfica de la función está desplazada a la izquierda $\frac{C}{B}$ unidades.

Si $\frac{C}{B}$< 0, la gráfica de la función está desplazada a la derecha $\left|\frac{C}{B}\right|$ unidades.

El corrimiento vertical D de la gráfica de la función *y* = *A* sen (Bx + C) +D con respecto a la gráfica de la función *y* = *A* sen (Bx + C) se llama Desplazamiento vertical.

Para *y* = *A tan* (B*x* + C) + D

El periodo = $\frac{\pi}{|B|}$ es el que describe entre qué valores de *x* se encuentra un ciclo completo de la gráfica de la función, o sea, la contracción o dilatación horizontal de la gráfica con respecto a la de la función básica

Ejemplo 7

Podemos determinar el comportamiento de la gráfica de la función $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 2$, calculando su amplitud, el periodo, el desplazamiento de fase y el desplazamiento vertical.

Amplitud = $|A| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$, valor que nos indica que la grafica de $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 2$ se amplia $\frac{1}{2}$ unidad hacia arriba y hacia abajo del eje de las abscisas, o sea, se aleja como máximo hacia arriba y hacia abajo del eje *x*, $\frac{1}{2}$ unidad.

Periodo = $\frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, valor que nos indica que entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ se encuentra un ciclo completo de la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 2$, es decir, está contraída con respecto a la gráfica de $y = \cos\ x$.

Desplazamiento de fase = $\left|\frac{C}{B}\right| = \left|\frac{-\pi}{4}\right| = \frac{\pi}{4}$, valor que nos indica que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 2$ está desfasada $\frac{\pi}{4}$ unidades a hacia la derecha con respecto a la gráfica de $y = \cos\ x$, puesto que $-\frac{\pi}{4}$ < 0.

Desplazamiento vertical = 2, valor que no indica que la gráfica de $y = \frac{1}{2}\cos(4x - \pi) + 2$ está desplazada 2 unidades hacia arriba sobre el eje de las abscisas, con respecto a la función básica.

Ejemplo 8

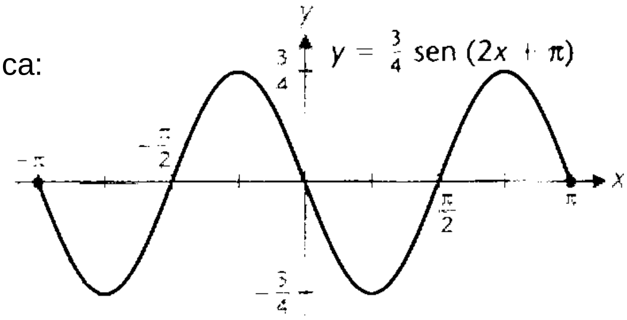
Podemos construir la gráfica de la función $y = \frac{3}{4}sen(2x - \pi)$, calculando su amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase.

Amplitud $=|A|=\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow$ la gráfica se aleja $\frac{3}{4}$ de unidad del eje de las abscisas, de $-\frac{3}{4}$ hasta $\frac{3}{4}$, o sea, su rango es $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$.

Periodo = $\frac{2\pi}{|B|}=\frac{2\pi}{|2|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$ $\Rightarrow$ la gráfica tiene un periodo completo de 0 a π

Desplazamiento de fase = $\left|\frac{C}{B}\right|=\left|\frac{-\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ la gráfica está desfasada $\frac{\pi}{2}$ unidades a la derecha de la función $y = sen\ \ x$. Con esta información llevada a una tabla:

Se construye la gráfica:



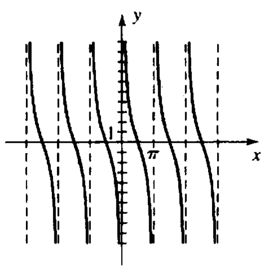
Ejemplo 9

Para calcular el periodo $y = 3\tan(2x+1)-4$, se procede como sigue:

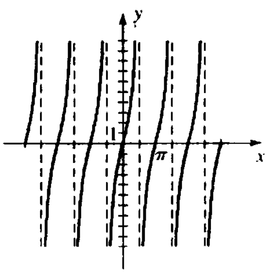
Periodo = $\frac{\pi}{|B|}=\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ la gráfica de $y = 3\tan(2x+1)-4$ tiene un ciclo completo de 0 a $\frac{\pi}{2}$, es decir, está contraída con respecto a $y = \tan\ \ x$.

Ejercicios:

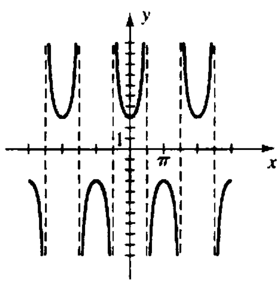
1. La gráfica de $y = 4\tan x$, es:



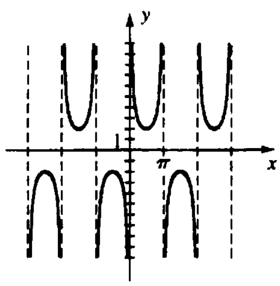
a)



b)



c)



d)

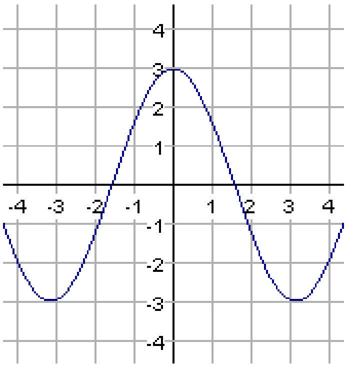
2. El periodo de $y = 4\tan x$, es:

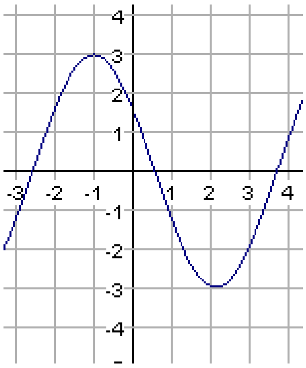
a) $\frac{\pi}{2}$ b) 2π c) π d) 4π

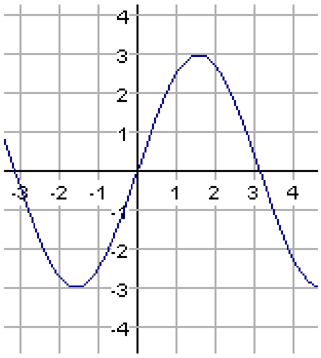
3. El periodo de $y = \tan\frac{1}{4}x$, es:

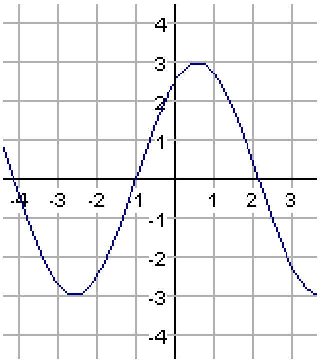
a) 4π b) π c) 2π d) $\frac{\pi}{4}$

4. La gráfica $y = 3\cos x$, es:


a)


b)


c)


d)

5. La amplitud de $y = 3\cos x$, es:

a) 4 b) 3 c) 1 d) 2

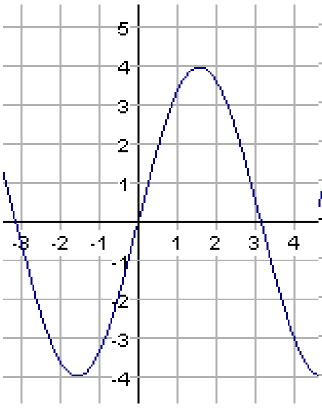
6. El periodo de $y = 3\cos x$, es:

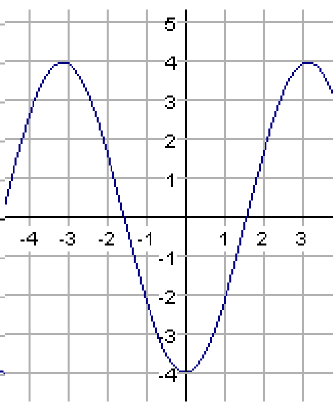
a) 4π b) π c) 3π d) 2π

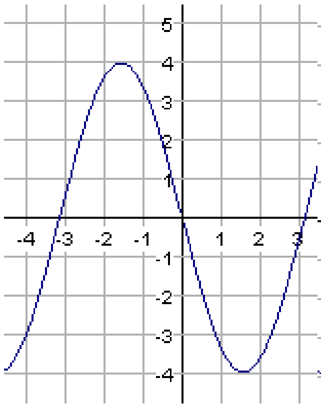
7. La amplitud de $y = -4senx$, es:

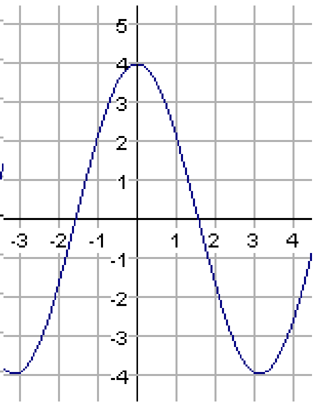
a) 4 b) 1 c) 2 d) -4

8. La gráfica de $y = -4senx$, es:


a)


b)


c)


d)

9. El periodo de $y = -4senx$, es:

a) 4π b) 2π c) 3π d) π

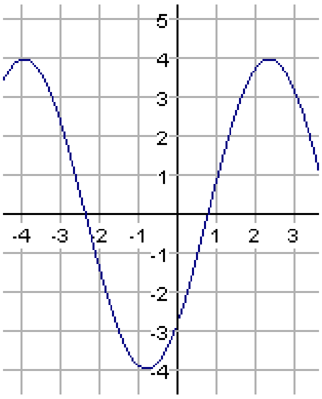
10. La amplitud de $y = 3\cos(x - \frac{\pi}{4})$, es:

a) 2 b) 1 c) 3 d) 4

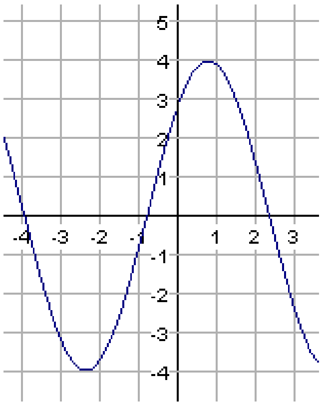
11. El periodo de $y = 5\cos(2x - \frac{\pi}{4})$, es:

a) 4π b) π c) 2π d) $\frac{\pi}{2}$

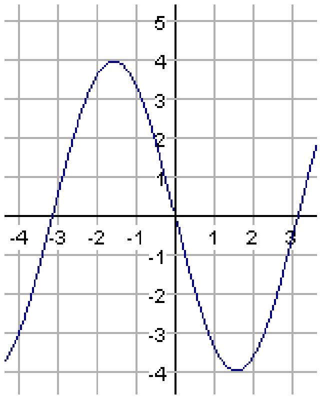
12. La gráfica de $y = 4\cos(x - \frac{\pi}{4})$, es:



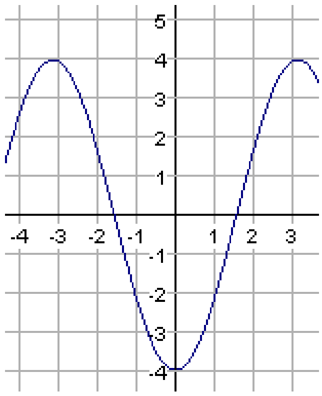
a)



b)



c)



d)

13. La amplitud de $y = -\cos(x - 3)$, es:

a) – 3 b) 1 c) 3 d) – 1

14. Con respecto a la gráfica de $y = sen\ x$, la gráfica de $y = 3sen(x - 5)$ está desplazada:

a) a la derecha b) hacia ningún lado c) no se puede saber d) a la izquierda

15. Con respecto a la gráfica de $y = \cos x$, la gráfica de $y = \cos(3x + 3)$ está desplazada:

a) a la derecha b) hacia ningún lado c) no se puede saber d) a la izquierda

16. Con respecto a la gráfica de $y = sen\ x$, la gráfica de $y = -\frac{3}{4} sen\ x$ está desplazada:

a) a la derecha b) hacia ningún lado c) no se puede saber d) a la izquierda

17. La amplitud de $y = 4 + 2sen\dfrac{\pi x}{2}$, es:

a) 2 b) $\dfrac{1}{2}$ c) 3 d) 4

18. El periodo de $y = 2 + 4sen\dfrac{\pi x}{2}$, es:

a) 4π b) 4 c) $\dfrac{4}{\pi}$ d) π

19. Con respecto a la gráfica de $y = sen\,x$, la gráfica de $y = sen\,3x - 5$, está desplazada:

a) 3 unidades hacia abajo b) 3 unidades hacia arriba

c) 5 unidades hacia abajo d) 5 unidades hacia arriba

20. Con respecto a la gráfica de $y = \cos x$, la gráfica de $y = -2\cos x + 3$, está desplazada:

a) 3 unidades hacia abajo b) 3 unidades hacia arriba

c) 2 unidades hacia abajo d) 2 unidades hacia arriba

Soluciones a los ejercicios:

Conversiones

1 – a	6 – d
2 – a	7 – c
3 – d	8 – b
4 – b	9 – c
5 – c	10 – c

Angulo de referencia

1 – d	6 – a	11 – b	16 – a
2 – a	7 – d	12 – a	17 – b
3 – a	8 – a	13 – b	18 – d
4 – d	9 – a	14 – b	19 – d
5 – c	10 – d	15 – d	20 – d

Gráficas de funciones trigonométricas

1 –c	6 – d	11 – b	16 – b
2 – b	7 – a	12 – b	17 – a
3 – a	8 – b	13 – b	18 – b
4 – a	9 – c	14 – a	19 – c
5 – b	10 – c	15 – d	20 – b

UNIDAD 4 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Propósito: Estudiar estás funciones trascendentes, cuya forma peculiar de variación permite modelar de crecimiento y decaimiento. Introducir la noción de función inversa. Reforzar la identificación de dominio y rango, así como la relación entre parámetros

Funciones exponenciales
Crecimiento exponencial

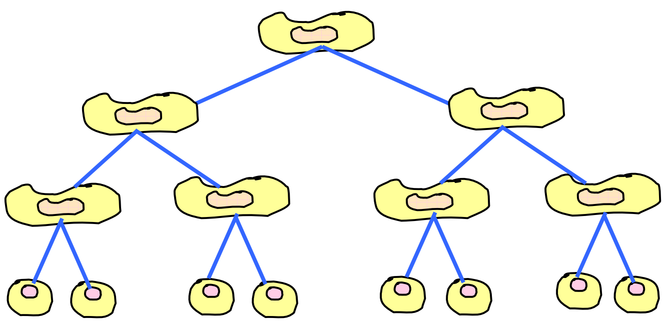
Objetivo: Identificar el crecimiento exponencial y sus relaciones o condiciones existentes y analizar la forma en que varían los valores de la función.

Instrucciones: Llena los espacios y contesta todas las preguntas, más adelante encontraras las respuestas para verificarlas.

El caso de las bacterias.

La bacteria al reproducirse se alarga y se estrecha por el centro para finalmente dividirse produciendo dos bacterias similares, como se muestra en la figura.

Este proceso va unido a una velocidad de reproducción muy grande: cada hora se tiene la división en dos y en pocas horas se tiene una población numerosa.



¿Qué tan numerosa?

Veamos cuánto completando la siguiente tabla:

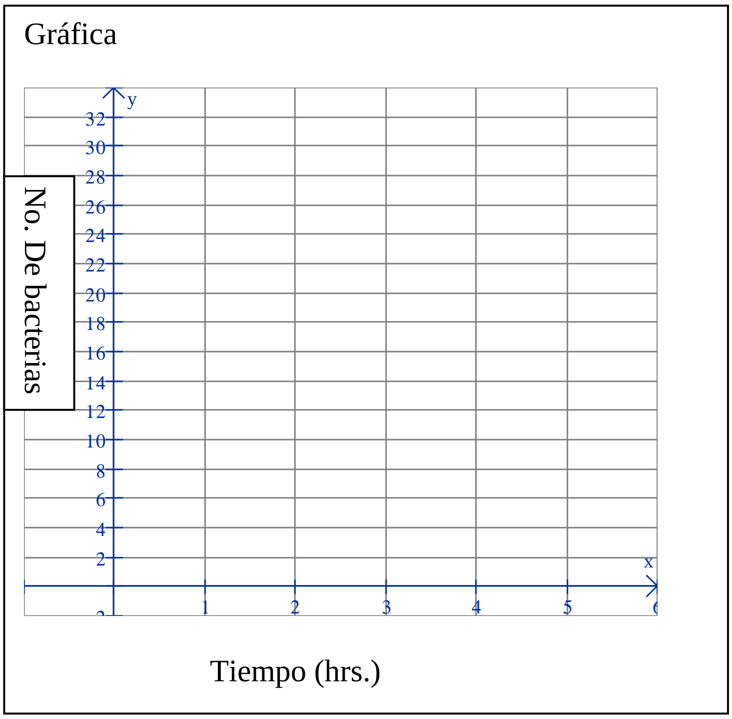
x tiempo (horas)	Número de bacterias
0	1
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
4	
5	
6	
:	:
x	2^x

Si traducimos el esquema numérico de la tabla anterior a símbolos algebraicos, descubriremos el modelo matemático que representa el crecimiento de las bacterias.

Escribe en símbolos algebraicos el modelo matemático del crecimiento poblacional de las bacterias.

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Haz la gráfica de los puntos.



Las bacterias crecen en forma exponencial, por lo que se dice que *y es una función exponencial de x*.

$$\boxed{y = 2^{x}}$$

Une los puntos con una curva e identifica la forma de las funciones exponenciales.

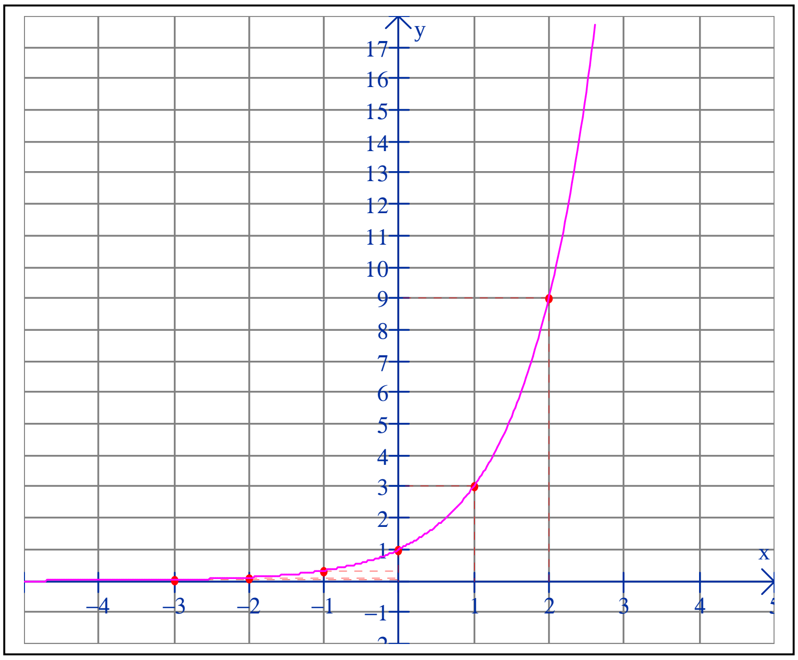
Nota: El unir los puntos permite obtener la forma de la función exponencial, pero en el caso de la reproducción de bacterias la variable de la función es discreta, es decir de puntos y saltos de uno a otro.

Graficas de funciones exponenciales

Objetivo*: Identificar que en la regla de correspondencia de las funciones exponenciales, la variable independiente está en el exponente. Identificar el dominio, el rango y la forma de las gráficas de funciones exponenciales.*

Completa la tabla de $f(x) = 3^x$ y verifica la gráfica.

x	$F(x)= 3^x$
– 3	1/ 27
– 2	1/ 9
–1	
0	1
1	
	9
3	27
4	81



1. Completa:

a) A x le podemos dar cualquier valor, por lo tanto el dominio es ___________________

b) Como la gráfica sólo abarca la parte positiva, el rango de la función es ____________

c) ¿La gráfica es creciente o decreciente? ______________________________________

d) A la izquierda del eje y de la gráfica, la función crece rápido o lento _______________

e) A la derecha del eje y de la gráfica, la función crece rápido o lento ________________

2. Ahora grafica en el mismo plano cartesiano $y = 4^x$, usa los valores para x de -3, -2,-1, 0, 1, 1.5, 1.8 y 2

   a) De acuerdo al análisis anterior, en que coinciden las gráficas.

____

____

3. De las siguientes funciones, sólo dos tienen las mismas características que las anteriores. ¿Cuáles son?

i. $f(x) = (-3)^x$

ii. $f(x) = 1^x$

iii. $f(x) = (3/2)^x$

iv. $f(x) = (1/3)^x$

De acuerdo a lo anterior, se obtiene que:

Una función exponencial con base ***b*** se define como una relación de la forma

variable

$y = \boldsymbol{b}^{x}$, donde ***b*** es un número real, tal que ***b*** > 0 y ***b*** $\neq 1$

Sus propiedades son:

- ✓ Dominio todos los números reales
- ✓ El rango es el intervalo de $(0, \infty)$
- ✓ $f(0) = 1$ para cualquier valor de b
- ✓ Si $b > 1$, la función es creciente
- ✓ Si $b < 1$, la función es decreciente

EJERCICIOS 1

1. Construye las gráficas de:

   a) $f(x) = (1/3)^x$

   b) $g(x) = 5^x$

   c) $h(x) = 2^{-x}$

2. Sin graficar, anota “C” si la función es creciente o “D” si es decreciente.

   a) $f(x) = (1/4)^x$ .... (   )

   b) $f(x) = 6^x$ .... (   )

   c) $f(x) = e^x$ ....(   )   (e = 2.718281828... es el número de Euler)

   d) $f(x) = 3^{-x}$ ....(   )

3. *Escribe el dominio y el rango de $f(x) = e^{x}$* ______________________________

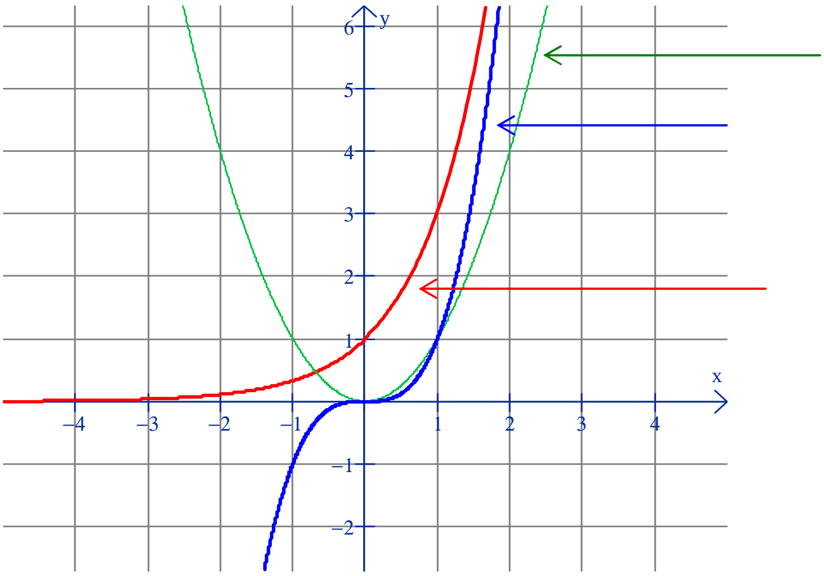
4. *¿Qué relación existe entre $f(x) = 3^{-x}$ con $f(x) = (1/3)^{x}$?* _______________

____.

Comparación de las funciones exponenciales con las funciones potencia.

***Objetivo**: Comparar el comportamiento entre este tipo de funciones y obtener conclusiones*

*En el plano cartesiano están dibujadas las funciones $f(x) = 3^{x}$, $g(x) = x^{2}$ y $h(x) = x^{3}$ Identifica cada una de ellas, **llena la tabla y contesta las preguntas**.*



Comparadas las funciones

Función	*Dominio*	*Rango*	*Abscisas negativas (Crec. o decr)*	*Abscisas positivas (Crec. o decr)*
$f(x) = 3^{x}$				
$g(x) = x^{2}$				
$h(x) = x^{3}$				

*1. A la derecha de y, ¿cuál función crece más rápido?*________________________________

*2. Para x = 5, ¿cuál función es mayor?*____

*3. Escribe las diferencias entre la función exponencial y las funciones potencia*____

____

Análisis de las funciones exponenciales trasladadas y el manejo de los parámetros a, h y k.

$$f\,(\,x\,) = a\,b^{(\,x-h)} + k$$

***Objetivo**: Comparar la función exponencial $f(x) = b^{x}$ con la función de arriba al cambiar los parámetros **a, h** y **k**.*

Nota: Para este análisis se recomienda usar un graficador, lo importante es observar los cambios que produce cada parámetro **a**, **h** y **k**.

*Análisis del parámetro **a**:*

Completa la tabla y grafica en el mismo plano las siguientes funciones con diferente color.

x	$f(x) = 3^{x}$	$f(x) = 2(3^{x})$	$f(x) = 4(3^{x})$
-2			
-1			
0			
0.5			
1			
1.5			
2			

1. *Escribe el dominio y el rango de cada una de ellas.*______________________

   ____

2. *¿Qué relación existe entre el dominio y rango de esas funciones?*

   ____

3. *Se podría decir que es la misma función sólo que trasladada a la izquierda. ¿Cómo lo puedes argumentar?*______________________________

   ____

4. *Si a es negativo, dar el dominio, rango y decir si es creciente o decreciente.*

   ____

El mismo tratamiento puedes darle a los otros parámetros h y k. Para abreviar te diremos que ocurre con cada uno de ellos comparado con la función $f(x) = b^x$

De $g(x) = b^{(x+h)}$ el dominio y el rango son los mismos que b^x y comparado con ésta se traslada a la izquierda h-unidades si $h > 0$ ó se traslada a la derecha si $h < 0$

De $h(x) = b^x + k$ se le aplica una traslación a hacia arriba si $k > 0$ ó hacia abajo si $k < 0$. El dominio es el mismo y el rango es el intervalo (k, ∞)

EJERCICIOS 2

Usa las gráficas de $f(x) = 2^x$ y a $f(x) = e^x$ para trazar las siguientes funciones y dar el dominio y el rango.

1. $f(x) = 3(2^x)$
2. $f(x) = -3(2^x)$
3. $f(x) = 2^{x+3}$
4. $f(x) = e^{x-2}$
5. $f(x) = e^x + 3$
6. $f(x) = 3(e^x) + 1$

Aplicaciones de las funciones exponenciales

***Objetivo**: Aplicar las funciones exponenciales para modelar algunas situaciones en contextos diversos*

Muchas situaciones se pueden representar con una función exponencial por ejemplo:

1. Interés compuesto continuo.

$$A = A_0 e^{it}$$

A es el monto total después de t años de una inversión ($)
A_0 es el capital inicial ($)
i es la tasa de interés en ***t*** años.
t es el tiempo que se aplica a la tasa de interés.

La misma fórmula nos sirve para describir el **crecimiento poblacional**, donde A_0 es la población inicial y ***i*** la tasa de crecimiento.

2. Desintegración radiactiva.

$$D(t) = m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}}$$

m *es la cantidad de material radiactivo al inicio*
t_0 *es la vida media del material*
t *es el tiempo de desintegración*
D *es la cantidad que queda después de t tiempo.*

3. Depreciación de Autos Usados

$$\mathbf{M = M_0 (1 - i)^t}$$

M_0 es el valor del carro al momento de la compra

i *es la* tasa de depreciación mensual

t *es* el número de meses que transcurridos

M es el precio del automóvil después de t años.

Ejemplo 1

El material radiactivo[2] Estroncio 90 tiene una vida media de 28 años, es decir, cada 28 años la mitad de la cantidad de estroncio se transforma en otra sustancia debido a la desintegración radiactiva. Se coloca una barra que contenga 200mg de estroncio 90 en un reactor nuclear, sea **D** la cantidad de Estroncio que queda después de t años.

a) ¿Cuál es la función exponencial que describe esta situación?
b) ¿Cuánto material queda, después de 50años?
c) Con la ayuda de la calculadora obtén una aproximación de 2 dígitos, para obtener el tiempo que tiene que transcurrir para que queden 40mg de estroncio 90.

Completa lo que falte

a) Se identifica que:

t_0 = ____ años, m = 200____ y al sustituir en

$$D(t) = m\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{t_0}} \text{ se obtiene } D(t) = 200\,(1/2)^{t/28}$$

b) D(50) = 200 ( )$^{(50/28)}$ = 58.006mg

c) Se le dan valores a t = 60 , 70 y 65. Observa que con 65.01 de años se obtiene casi 40mg.

---

[2] Barnet, R. p. 250

Ejemplo 2

Se invierten $8000.00 a cuatro años en certificados que ganan 4% de interés compuesto a **pagos continuos**. Emplea la fórmula $A = A_0 e^{it}$ y obtén:

a) La inversión después de 4 años.
b) El tiempo para que duplique la inversión.

Completa lo que falte

a) Se identifica que:

t = 4 ________

i = ____% y se escribe en forma decimal como _______

A_0 = $______ y al sustituir en

$A = A_0 e^{it\,t}$ *se obtiene* $A = 8\,000\, e^{(0.04)\,t}$

A =$ 9 388.09

b) Si A =16 000 y queremos el tiempo sustituimos

_______ = 8 000 (   )$^{(\quad)\,t}$ despejando

obtenemos $2 = e^{(0.04)\;4}$ *entonces con la calculadora damos diferentes valores a t, en la parte izquierda de la ecuación de forma que los valores obtenidos se aproximen a 2, prueba con t = 10, 15, 17, 17.5, etc.*

EJERCICIOS 3

1. Suponiendo que la vida media de un isótopo radiactivo es de 10 000 años[3] ¿Cuánto le tomará a esta sustancia decaer hasta 1/16 de su cantidad original?

2. Suponga que se invierten $6 000 a tres años en certificados de depósitos que ganan 3% de interés compuesto a pagos continuos. Emplea la fórmula $A = Pe^{rt}$ y obtén:

   a) La inversión después de 3 años.
   b) El tiempo para que duplique la inversión.

3. Si México duplicará su población pasados 30 años.

   a) ¿Cuál es la tasa de crecimiento poblacional?
   b) Si hay 110 millones de habitantes en el país, ¿cuántos habrá, en 10 años más?

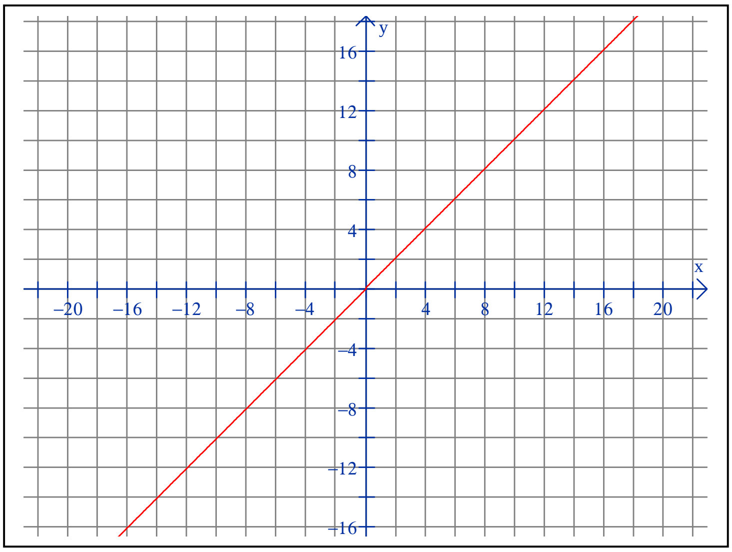
[3] Medina, B. et al p. 43

Funciones logarítmicas

***Objetivos**: Explicar verbalmente el significado del log $_b$ (x). Explicar la equivalencia entre las expresiones log $_b$ (x) con* $x = b^y$. *Transitar entre una expresión y otra.*

1. Completa la tabla y grafica la función $y = 2^x$.

Exponentes *x*	Potencias de 2 *y*
4	16
	32
2	4
1	2
0	
- 1	1 / 2
- 2	
- 3	1 / 8
- 4	



2. Usa la tabla anterior y averigua de donde provienen los valores del lado derecho en la tabla, *i. e.* si el exponente de la base 2 es 4, la $x = 16$. Usa tu calculadora para obtener y comprobar que los exponentes de la tabla dan los valores del lado derecho.

Potencias de 2 *x*	Exponentes *y*
16	4
4	
2	
1	0
1 / 2	- 1
	- 2
1 / 8	
1 / 16	

3. En el mismo plano, grafica estos puntos de la función $x = 2^y$, es decir, la inversa de la función exponencial.

4. Si hiciste bien la gráfica, la recta $y = x$ es el espejo donde se ven la función exponencial y que su reflejo es la función logarítmica denotado por $y = \log_2(x)$

5. Observa la función $y = \log_2(x)$ y contesta:
   a) ¿Cuál es el dominio?______________________
   b) ¿Cuál es el rango?_______________________
   c) ¿Es creciente o decreciente?_____________________

Con estos elementos se puede establecer, que el logaritmo de un número en una determinada base, es el exponente que afecte a esa base para obtener la potencia.

¿Un logaritmo es un exponente?

Piensa en $y = \log_b x$ como la respuesta a la pregunta: ¿Cuál es el exponente al que se debe elevar b para obtener un número x?

$$\underbrace{y}_{\text{exponente}} = \log_{\underbrace{b}_{\text{base}}} x \quad \textit{sí y solo sí} \quad x = b^y$$

donde $b \neq 1$ y $b > 0$

Los logaritmos más importantes son:

El ***logaritmo en base 10*** que es de uso frecuente, por ello en su notación no se le indica la base.

$$y = \log x \quad \textit{sí y solo sí} \quad x = 10^y$$

El ***logaritmo natural*** es el logaritmo en base ***e***, entonces:

$$\boldsymbol{\log_e(x) = \ln(x)}$$

EJERCICIOS 4

Utiliza la relación entre las funciones logarítmica y exponencial:

1. Escribe los equivalentes.

Ejemplo: $y = \log_{1/2}(x)$ sí y solo sí $x = (1/2)^x$

i. $y = \log_6(x)$ *sí y solo sí* $x =$ _____
ii. $y = \ln(x)$ *sí y solo sí* _______
iii. $y = \log_5(x)$ ______________________

2. Traduce y encuentra el valor de ***y***.

Ejemplo: $y = \log_4 (64)$ sí y solo sí $64 = 4^y$ entonces $y = 3$

i. $y = \log(1/2)$

ii. $y = \log_3(27)$

iii. $y = \ln(e^4)$

iv. $y = \log(10\,000)$

3. Haz las gráficas de las siguientes funciones y determina el dominio y el rango.

a) $f(x) = \log(x)$

b) $f(x) = \ln(x)$

c) $f(x) = \log_3(x)$

d) $f(x) = \log_4 x$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Sí b > 0 y b ≠ 1, *x* y "*y*" números reales positivos y *n* cualquier número real.

Logaritmo de un producto. $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

Logaritmo de un cociente $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

Logaritmo de una potencia $\log_b(x^n) = n\log_b(x)$

Revisa en la bibliografía como se deducen estas propiedades a partir de las leyes de los exponentes. Después aplícalas en los siguientes ejercicios tanto de numéricos como de ecuaciones logarítmicas.

EJERCICIOS 5

Aplica las propiedades de los logaritmos

1. Simplifica $\log(x^2 - 2x) - \log(x)$

2. Desarrolla $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$

3. Encuentra el valor de x en cada caso y compruébalo.

   a) $3 \ln x = \ln 10$

   b) $e^{3x+5} = 100$

   c) $6(4^{x+1}) = 1.5$

Ejemplo: Si una población crece siguiendo el modelo

$$A(t) = A_0 e^{0.014t}$$

con A_0 la población inicial

¿Cuánto tiempo tarda en duplicarse la población?

Como se va a duplicar la población tenemos que $A(t) = 2A_0$ por lo que al sustituir en el modelo se obtiene

$$2A_0 = A_0 e^{0.014t}$$

$$2 = e^{0.014t}$$

Ahora queremos saber cuál debe ser el valor del ***exponente*** para que la función exponencial sea igual a 2.

Volviendo a nuestro problema, de obtener el exponente al cual hay que elevar e para obtener 2 lo traduciremos a logaritmos.

$$2 = e^{0.014t} \text{ sí y solo sí } \quad 0.014t = \ln(2) \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\ln(2)}{0.014} = 49.51 \text{ años}$$

Que es el tiempo necesario para que la población se duplique.

Problemas

1. Si la India cuenta con 914 millones de habitantes[4] y tiene una tasa de crecimiento del 2%, ¿cuánto tiempo tiene que pasar, para que ese país tenga 1 200 millones de habitantes?

---

[4] Muy interesante, 1994.

2. Los carros usados se deprecian un 13% anualmente. Si Pedro compró su carro en $90 000 en 2005, ¿qué tiempo tardará en depreciarse a $65 000?

3. Resuelve la ecuación $3^y = 18$ aplicando el logaritmo en base 10 ó el logaritmo en base *e* y sus propiedades.

4. Si se quiere saber el valor de los logaritmos de bases diferentes de 10 y de *e,* se procede de la siguiente forma:

i. Se traduce

$Log_4(x) = y$ *sí y solo sí* $4^y = x$

ii. Se aplica el logaritmo (base 10 ó base e)

$\log(4^y) = \log(x)$ *entonces* $y \log(4) = \log(x)$

iii. Se despeja *y*

$$y = \frac{\log(x)}{\log(4)}$$

EJERCICIOS 6

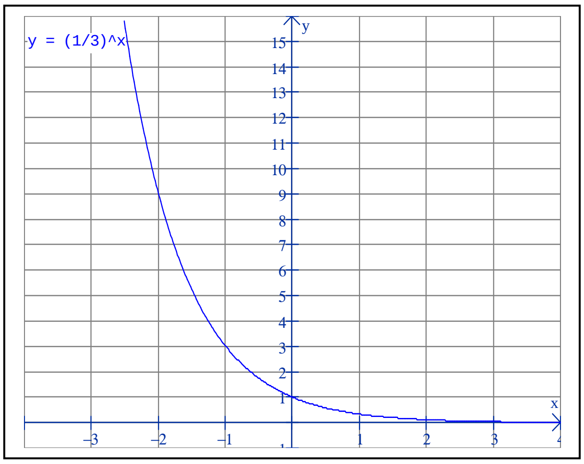
Ejemplo: $\log_4(40) = y$ entonces $y = \dfrac{\log(40)}{\log(4)} = 2.6609.$

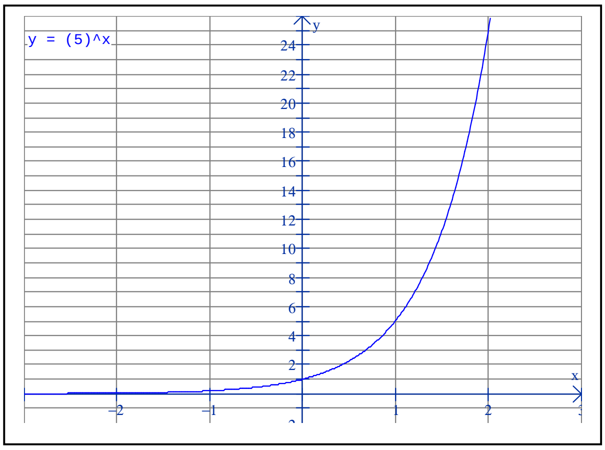
1. $\log_5(100) =$
2. $\log_6(72) =$
3. $\log_2(23) =$

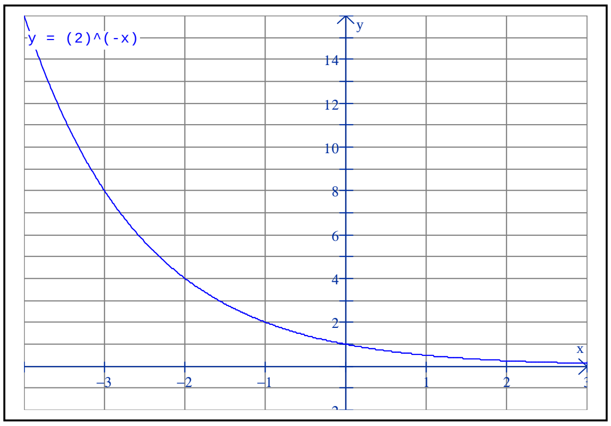
RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

EJERCICIOS 1

1.







2. *$f(x) = (1/4)^{x}$ .... (D)*

  a) $f(x) = 6^{x}$ .... (C)

  b) $f(x) = e^{x}$ ....(C)

  c) $f(x) = 3^{-x}$ ....(D)

  d)

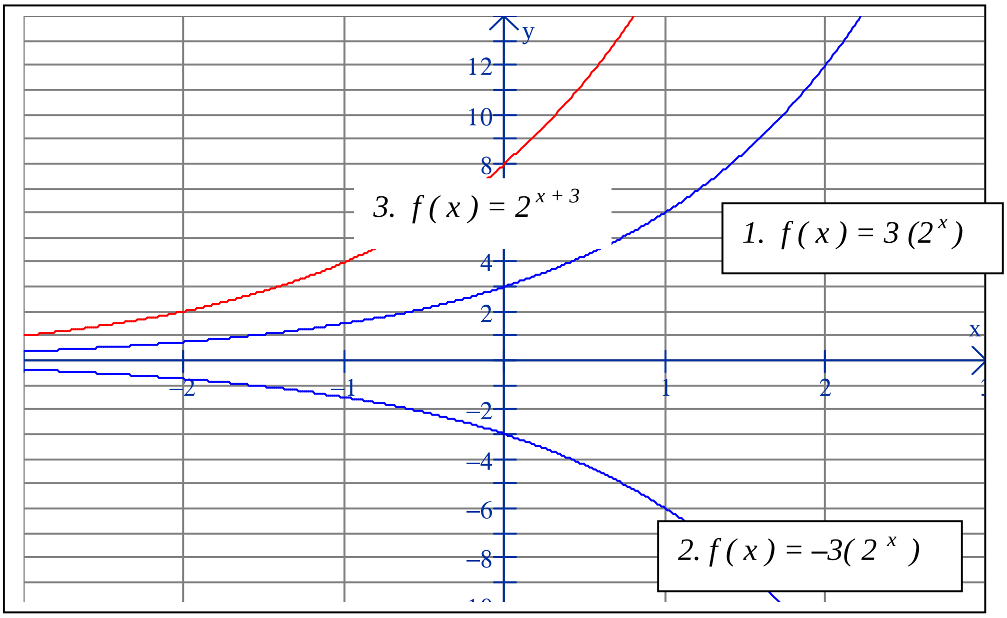
3. De $f(x) = e^{x}$ $D = R$ y $R = (0, \infty)$

4. $f(x) = 3^{-x}$ es <u>la misma función</u> que $f(x) = (1/3)^{x}$

EJERCICIOS 2

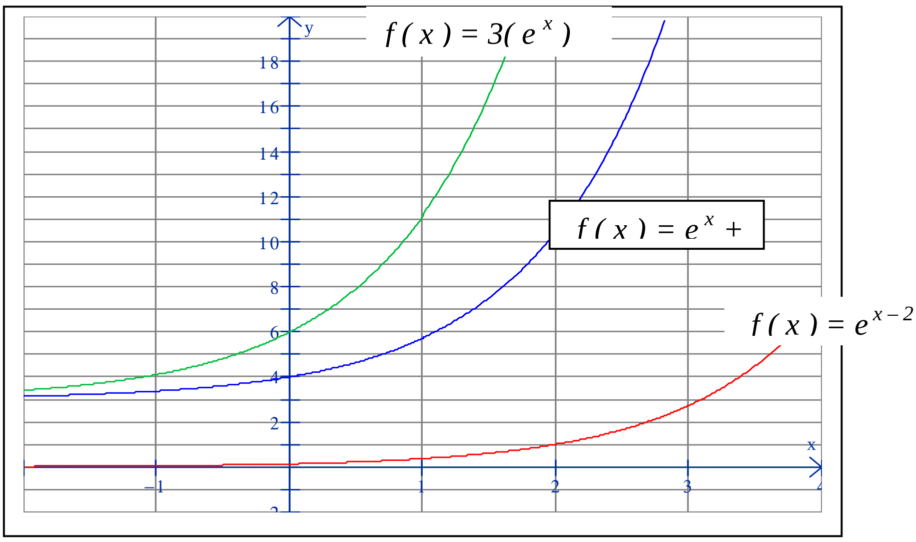
El dominio de todas las funciones es el conjunto de todos los números reales.

1. $f(x) = 3(2^x)$ $R = (0, \infty)$
2. $f(x) = -3(2^x)$ $R = (-\infty, 0$
3. $f(x) = 2^{x+3}+1$ $R = (0, \infty)$



Rango

4. $f(x) = e^{x-2}$ $R = (0, \infty)$
5. $f(x) = e^x + 3$ $R = (3, \infty)$
6. $f(x) = 3(e^x)$ $R = (3, \infty)$



EJERCICIOS 3

1. 40 000 años tardaría el isótopo radiactivo decaer hasta 1/16 de su cantidad original

2. a) La inversión después de 3 años es \$6 565.05
   b) En 23.1 años se duplica la inversión.

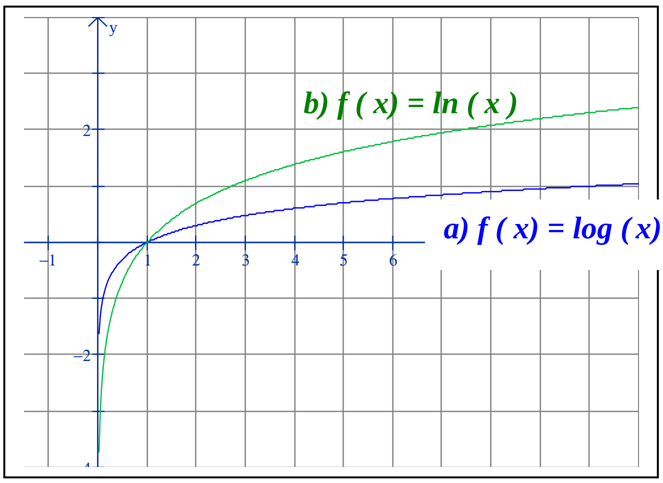
3. a) La tasa de crecimiento poblacional es 2.31%
   b) Habrá 138.5845 millones de habitantes en el país.

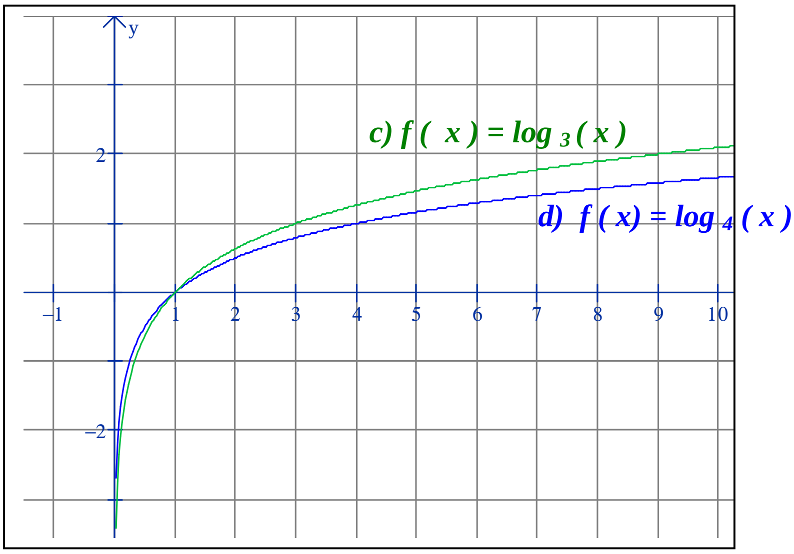
EJERCICIOS 4

1. Escribe los equivalentes:
   i. $6^{y} = x$
   ii. $e^{y} = x$
   iii. $5^{y} = x$

2. Traduce y encuentra el valor de ***y***:
   i. $y = \log(1/2)$ sí y solo sí $1/2 = 10^{y}$ entonces $y = -0.30103$
   ii. $y = \log_3(27)$ sí y solo sí $27 = 3^{y}$ entonces $y = 3$
   iii. $y = \ln(e^{4})$ sí y solo sí $e^{4} = e^{y}$ entonces $y = 4$
   iv. $y = \log(10\,000)$ sí y solo sí $10\,000 = 10^{y}$ entonces $y = 4$

3. El dominio son todos los reales positivos y el rango son los números reales.





EJERCICIOS 5

1. log (x+2) 2. log (a)+ log (b)– log (c) 3. a) x = 2.15 b) x = – 0.1316 c) x = -2

Problemas

1. Tiene que parar 13.6 años. 2. En 5.25 años el auto valdrá a $65 000.

EJERCICIOS 6

2. $\log_5 (100) = 2.8613$ 3. $\log_6 (72) = 2.3868$ 4. $\log_2 (23) = 4.5236$

BIBLIOGRAFIA

Barnet, R Precálculo. Álgebra, Geometría Analítica
ED. LIMUSA

Leithold, L Álgebra
Editorial HARLA

Torres, C. Geometría Analítica
Editorial Santillan

Swokowski, E. Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica
Grupo Editorial Iberoamericana