



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
ESCUELA NACIONAL  
COLEGIO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES  
PLANTEL SUR  
ACADEMIA DE MATEMÁTICAS**



**GUÍA PARA PREPARAR EL EXAMEN EXTRAORDINARIO  
DE MATEMÁTICAS I**

**ELABORARON**

**PROFR. HELIOS BECERRIL MONTES  
PROFR. JUAN CASTRO MORA  
PROFR. DANIEL FLORES IBARRA  
PROFRA. MARIA DE LOS ANGELES FRANCO LOPEZ PORTILLO  
PROFR. JAVIER GUILLEN ANGUIANO  
PROFRA. GUADALUPE ISLAS CABALLERO  
PROFR. EFRAIN MONTUY GONZALEZ  
PROFRA. MARIA DE LOURDES ROMERO MIRANDA**

**FEBRERO DE 2006**

# INDICE

	Página
<b>UNIDAD 1. NÚMEROS Y OPERACIONES BÁSICAS</b>	<b>7</b>
Números enteros. Uso, orden representación en la recta numérica. Operaciones básicas, leyes de los signos. Prioridad de las operaciones.	
Números racionales. Distintos significados y representaciones: <ul style="list-style-type: none"><li>- División.</li><li>- Parte de un todo.</li><li>- Razón.</li><li>- Porcentajes.</li><li>- Fracciones equivalentes.</li><li>- Notación decimal.</li></ul> Orden, representación gráfica en la recta numérica. Operaciones básicas. Mínimo común múltiplo. Máximo común divisor. Prioridad de las operaciones. Uso de signos de agrupación y prioridad del cálculo.	
Potencias y Radicales.	
Problemas diversos de corte aritmético.	
<b>UNIDAD 2. VARIACIÓN DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES</b>	<b>29</b>
Variación Proporcional Directa. Situaciones que involucran cambio. Introducción a la noción de variación. Identificación de las variables dependiente e independiente en situaciones concretas. Variación proporcional entre dos cantidades. Uso de tablas y gráficas. Análisis del cociente $y/x$ para varias parejas de valores. Constante de proporcionalidad. Problemas de variación proporcional directa.	
Funciones Lineales. Formas de representación de una función lineal: tablas, gráficas y modelo algebraico. Variación Lineal. Comparación entre los cambios de $y$ respecto a los de $x$ ( $\Delta y / \Delta x$ ). Análisis de los parámetros $a$ y $b$ en el comportamiento de la gráfica de $y = ax + b$ . Vinculación entre $a$ y el cociente ( $\Delta y / \Delta x$ ). Situaciones de diversos contextos que se modelan con una función lineal.	

### UNIDAD 3. ECUACIONES LINEALES

39

Problemas que dan lugar a ecuaciones lineales en una incógnita.  
Solución por métodos informales.

Ecuaciones lineales en una incógnita, como:

Un caso especial de una igualdad entre expresiones algebraicas.

Una condición que debe satisfacer un número buscado.

Un caso particular de una función lineal.

Resolución de ecuaciones de los siguientes tipos:

a)  $ax = b$

b)  $ax + b = c$

c)  $ax + bx = d$

d)  $a(x + b) = c(x + d)$

e)  $ax/b = c/d$

f)  $(x + b)^2 = (x + c)(x + d)$

g)  $(x + a)/(x + b) = (x + c)/(x + d)$

Interpretación gráfica de la solución de una ecuación lineal en una incógnita.

Planteamiento y resolución de problemas de diversos contextos que dan lugar a ecuaciones lineales con una incógnita.

### UNIDAD 4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

47

Problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales y no lineales (casos sencillos), su solución por medio de una tabla de valores y gráficamente.

Gráfica de la ecuación lineal en dos variables. Pendiente, ordenada y abscisa al origen.

Gráfica de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2, en un mismo plano.

Interpretación geométrica de la solución.

Sistemas Compatibles (consistentes) e Incompatibles (inconsistentes).

Número de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2.  
condición de paralelismo.

Sistemas equivalentes.

Métodos algebraicos de solución de un sistema de ecuaciones lineales 2 x 2.  
Suma y Resta, Sustitución e Igualación.

## UNIDAD 5. ECUACIONES CUADRÁTICAS

58

Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas con una incógnita.

Resolución de ecuaciones cuadráticas de las formas:

- a)  $ax^2 + c = 0$
- b)  $ax^2 + c = d$
- c)  $ax^2 + bx = 0$
- d)  $a(x + m)^2 = n$
- e)  $(ax + b)(cx + d) = 0$

Resolución de la ecuación cuadrática completa  $ax^2 + bx + c = 0$

Factorización.

Método de completar cuadrados.

Fórmula general

Análisis del discriminante  $b^2 - 4ac$ .

El número  $i$ .

Raíces dobles.

Número y naturaleza de las soluciones de la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$

## RESPUESTA DE LOS EJERCICIOS

73

## PRESENTACIÓN

Los exámenes extraordinarios son oportunidades que deberás aprovechar para aprobar las asignaturas que, por diversas razones, reprobaste en el curso normal; pero, presentarse a un examen sin la preparación suficiente significa un fracaso seguro, es una pérdida de tiempo y un acto irresponsable que puedes evitar.

Para aumentar tu probabilidad de éxito en el examen mediante la utilización de la guía, es necesario que:

- Sigues al pie de la letra las instrucciones de la guía.
- Procura dedicar al estudio de esta guía, tres horas diarias continuas, durante al menos 15 días antes del examen.
- Contesta toda la guía y checa tus respuestas, cuando no hayas contestado correctamente acude a alguna asesoría.

### Programa del primer semestre de Matemáticas

#### 1. Ubicación del curso.

Este primer curso, está enfocado prioritariamente a la revisión y al estudio de algunos conocimientos básicos del Álgebra, pero sin descuidar la perspectiva de que éstos sirven de sustento y están relacionados con conceptos y procedimientos de los otros ejes temáticas. Es decir, no se trata de incluir contenidos del Álgebra por sí mismos, sino en función de una metodología propia y de la relación que éstos guardan con otras ramas de la Matemática.

Para favorecer el tránsito de la aritmética al álgebra, se revisa de manera reflexiva tanto los números enteros y racionales como los algoritmos de las operaciones aritméticas básicas, su jerarquía y los signos de agrupación. Esta revisión se trabaja a través de problemas de diversa índole, incorporando desde el inicio algunas estrategias de resolución de problemas.

También en este curso, se comienza a trabajar el concepto de función y el manejo del Plano Cartesiano, entretejiéndolos con la búsqueda de representaciones (algebraicas, tabular y gráfica) para estudiar diversas situaciones que involucran cambio.

En cuanto al tratamiento general de los contenidos, más que la memorización de una fórmula o algoritmo, interesa que el alumno perciba la necesidad de contar con un camino más eficiente para resolver o representar cierto tipo de problemas o ejercicios que él ya ha percibido como análogos. Además de la traducción de un problema que se resuelve con una ecuación es importante que comprenda la riqueza de la estrategia algebraica que le permite establecer relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas. Más que la repetición interminable de ejercicios que aparentan responder

a un desglose exhaustivo de casos, se pretende que analice la estructura básica de ellos y vea cómo pasar de una situación nueva a otra que ya conoce.

## **2. Propósitos del curso.**

Al finalizar el primer curso de Matemáticas, a través de las diversas actividades encaminadas al desarrollo de habilidades y a la comprensión de conceptos y procedimientos, el alumno:

- 1) Conoce y maneja algunas estrategias para la resolución de problemas.
- 2) Reconoce que la resolución algebraica de ecuaciones involucra un proceso que permite reducir una ecuación dada a otra más simple, hasta alcanzar una forma estándar.
- 3) Desarrolla su capacidad de transitar por distintos registros de representación: verbal, tabular, algebraico y gráfico.
- 4) Resuelve problemas que dan lugar a una ecuación de primer grado, una cuadrática, o un sistema de ecuaciones.
- 5) Utiliza la representación algebraica, gráfica y tabular, para estudiar fenómenos que involucran variación proporcional directa y de tipo lineal.
- 6) Utiliza las representaciones algebraica y gráfica para modelar situaciones con ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones.
- 7) Adquiere la capacidad para resolver ecuaciones lineales y cuadráticas, y sistemas de ecuaciones lineales..

## **3. Contenidos Temáticas.**

<b>No.</b>	<b>Nombre de la unidad</b>
<b>1</b>	<b>Números y Operaciones Básicas</b>
<b>2</b>	<b>Variación Directamente Proporcional y Funciones Lineales</b>
<b>3</b>	<b>Ecuaciones Lineales</b>
<b>4</b>	<b>Sistemas de Ecuaciones Lineales</b>
<b>5</b>	<b>Ecuaciones Cuadráticas</b>

## **4. Bibliografía sugerida**

GOBRAN, Alfonse, Álgebra elemental. Grupo Editorial Iberoamericana, México 1990.

LEHMANN, Charles H. Álgebra. Editorial Limusa, México 1992.

SMITH, et al., Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. Addison Wesley y Longman, México, 1998.

## UNIDAD I. NÚMEROS Y OPERACIONES BÁSICAS

Al finalizar esta unidad:

- Utilizarás la recta numérica y las propiedades de los números para calcular expresiones aritméticas.
- Utilizarás los algoritmos tradicionales de operaciones con números enteros y racionales,
- Representarás a los números racionales en sus diferentes formas.
- Utilizarás la prioridad y propiedades de las operaciones así como el uso correcto de los paréntesis para el cálculo de expresiones aritméticas con más de una operación.

### Números Enteros

El conjunto de números está formado por los números positivos, los negativos y el cero, se denotan por la letra **Z** y son los siguientes:

$$Z = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

#### Representación en la recta numérica.

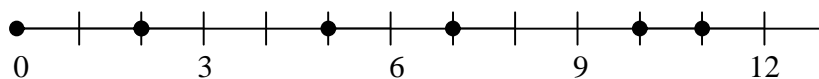
Los números enteros se pueden representar en la recta numérica, como se indica:



A la ubicación en la recta numérica del cero se llama **origen**, a la derecha del origen se localizan los enteros positivos y a la izquierda los enteros negativos.

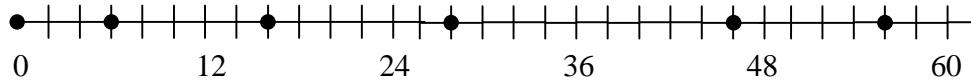
#### Ejercicios:

1) Los números representados en la recta numérica de la figura, son:



- a) 0, 7, 14, 21, 28, 35.
- b) 0, 2, 5, 7, 10, 11.
- c) 30, 45, 60, 75, 90.
- d) 0, 3, 6, 9, 12, 15.

2) Los números representados en la recta numérica de la gráfica, son:



- a) 0, 7, 14, 21, 28, 35.
- b) 0, 2, 5, 7, 10, 11.
- c) 0, 6, 16, 28, 46, 56.
- d) 0, 3, 6, 9, 12, 15.

3) El orden de mayor a menor de los números  $-3, -4, -15, 0$ , es:

- a)  $-4, -15, 0, -3$
- b)  $-15, -4, -3, 0$
- c)  $0, -3, -15, -4$
- d)  $0, -3, -4, -15$

4) El orden de menor a mayor de los números  $-2, -10, 1, -3, 0, 2$ , es:

- a)  $-10, -3, -2, 1, 0, 2$
- b)  $2, 0, 1, -10, -3, -2$
- c)  $2, 0, 1, -2, -3, -10$
- d)  $2, 0, 1, -2, -10, -3$

5) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- a)  $-48 > -25$
- b)  $-12 < -48$
- c)  $-4 < -25$
- d)  $-12 > -48$

6) ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

- a)  $-40 > 36$
- b)  $-45 < -8$
- c)  $-8 > 0$
- d)  $0 > 36$

7) Sobre la línea correspondiente escribe si la proposición es Falsa o Verdadera

- a)  $-23 > -45$  \_\_\_\_\_
- b)  $0 = 0$  \_\_\_\_\_
- c)  $66 < 33$  \_\_\_\_\_
- d)  $-1 > 1$  \_\_\_\_\_

8) El mayor de los números 1011, 1001, 1010, 1100, es:

- a) 1001
- b) 1100
- c) 1010
- d) 1011



9) El menor de los números 9009, 9900, 9090, 9099

- a) 9900
- b) 9090
- c) 9009
- d) 9099

10) ¿En cuál de las siguientes mediciones se utilizan solo números enteros?

- a) De una temperatura
- b) De la fecha de nacimiento
- c) De una velocidad de un auto
- d) De la hora de entrada al trabajo

### Operaciones básicas, leyes de los signos.

Las operaciones que se pueden realizar con números enteros son: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

En álgebra varios números escritos uno a continuación de otro y relacionados con signos + ó - forman una *suma algebraica*.

$2 + 7$ ,  $-6 - 4$ ,  $-8 + 9$ ,  $2 - 4$  son sumas algebraicas (nota que si el primer número de la suma es positivo no se acostumbra escribir su signo).

Las **reglas** para efectuar sumas algebraicas son claras. Al aplicarlas recuerda que el **valor absoluto** de un número es la distancia que existe entre el origen y el punto que representa al número sobre la recta numérica y que se denota por  $|a|$ , así por ejemplo,  $|-3| = 3$  y  $|+7| = 7$ .

Si los números que se suman tienen **el mismo signo**, se **suman** sus valores absolutos y el resultado tendrá el signo original de ambos:

$$\begin{aligned} 2 + 7 &= 9 \text{ (se } \mathbf{suman} \text{ 2 y 7 el resultado tiene signo +)} \\ -6 - 4 &= -10 \text{ (se } \mathbf{suman} \text{ 6 y 4 y el resultado tiene signo -)} \end{aligned}$$

Si los números que se suman tienen **signos diferentes**, se **restan** sus valores absolutos y el resultado tendrá el signo del de mayor en valor absoluto.

$$-8 + 9 = 1 \text{ (se } \mathbf{resta} \text{ 8 menos 8 y el resultado tiene signo + por ser el signo del número de mayor valor absoluto)}$$

$$2 - 4 = -2 \text{ (se } \mathbf{resta} \text{ 4 menos 2 y el resultado tiene signo - por ser el signo del número de mayor absoluto)}$$

Al igual que las sumas, las multiplicaciones y divisiones tienen sus reglas las cuales son:  
Si los números que se multiplican o dividen tienen **el mismo signo**, se **multiplican o dividen** sus valores absolutos y el resultado será siempre positivo:

$$\begin{aligned}2 \times 7 &= 14 \text{ (se } \mathbf{multiplican} \text{ 2 y 7 el resultado tiene signo +)} \\ (-6)(-4) &= 24 \text{ (se } \mathbf{multiplican} \text{ 6 y 4 y el resultado tiene signo +)} \\ 18 \div 6 &= 3 \text{ (se } \mathbf{divide} \text{ 18 entre 6 el resultado tiene signo +)} \\ (-12) \div (-4) &= 3 \text{ (se } \mathbf{divide} \text{ 12 entre 4 y el resultado tiene signo +)}\end{aligned}$$

Si los números que se multiplican o dividen tienen **signos diferentes**, se **multiplican o dividen** sus valores absolutos y el resultado será siempre negativo.

$$\begin{aligned}(-9)8 &= -72 \text{ (se } \mathbf{multiplican} \text{ 9 y 8 y el resultado tiene signo -)} \\ 4(-2) &= -8 \text{ (se } \mathbf{multiplican} \text{ 4 y 2 y el resultado tiene signo -)} \\ (-15) \div 3 &= -5 \text{ (se } \mathbf{divide} \text{ 15 entre 3 y el resultado tiene signo -)} \\ 8(-2) &= -16 \text{ (se } \mathbf{divide} \text{ 8 entre 2 y el resultado tiene signo -)}\end{aligned}$$

La **potenciación**, sigue las reglas de la multiplicación ya que debes recordar que la potencia se obtiene multiplicando a la base por sí misma, el número de veces que el exponente lo exprese, así:

Si la base es positiva la potencia será siempre positiva:

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ (se } \mathbf{multiplica} \text{ 2 por sí mismo 3 veces y la potencia tiene signo +)}$$

Si la base es negativa y el exponente par, la potencia siempre será positiva.

$$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81 \text{ (se } \mathbf{multiplica} \text{ -3 por sí mismo 4 veces y la potencia tiene signo +)}$$

Si la base es negativa y el exponente impar, la potencia siempre será negativa.

$$(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125 \text{ (se } \mathbf{multiplica} \text{ -5 por sí mismo 3 veces y la potencia tiene signo -)}$$

La **radicación** de números enteros no siempre genera números enteros, sino números irracionales, si el radicando es positivo, también genera números imaginarios si el radicando es negativo y el índice es par, los cuales no se tratarán en esta unidad.

Simplemente se tratará la radicación de enteros cuya raíz sea entera.

Si el índice o grado de la raíz es par, el número tendrá una raíz positiva y una negativa.

$$\sqrt{4} = \pm 2 \text{ (se extrae la raíz cuadrada de 4 y se tiene que es 2 ó -2)}$$

Si el índice es impar, el número tendrá la raíz del mismo signo que el radicando.

$$\sqrt[5]{-243} = -3 \text{ (Se extrae la raíz quinta de 243 y será negativa)}$$

**Ejercicios:**

1) ¿Qué es la recta numérica? \_\_\_\_\_

2) ¿Cuáles son los números enteros? \_\_\_\_\_

3) Escribe 5 ejemplos de uso de los números enteros

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

4) ¿Cuáles son los números enteros negativos? \_\_\_\_\_

5) ¿Cuál es el entero negativo más grande? \_\_\_\_\_

6) ¿Cuáles son los números enteros positivos? \_\_\_\_\_

7) ¿Cuál es el entero positivo más pequeño? \_\_\_\_\_

8) El cero como se llama \_\_\_\_\_ y su signo es: \_\_\_\_\_

9) En la recta numérica ¿dónde quedan los enteros positivos? \_\_\_\_\_

10) ¿Hay criterios par colocar los enteros en la recta? ¿Cuáles son? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

11) ¿Qué es el valor absoluto de un número real? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

12) Califica como verdadero o falso cada uno de los siguientes enunciados:

a) La suma de dos enteros positivos es positiva: \_\_\_\_\_

b) La suma de dos enteros positivos es negativa: \_\_\_\_\_

c) La multiplicación de dos enteros negativos es negativa: \_\_\_\_\_

d) La división de dos enteros negativos es positivo: \_\_\_\_\_

e) La potencia quinta de un número negativo es positiva \_\_\_\_\_

f) La raíz cúbica de una número positivo es negativa \_\_\_\_\_

13) Escribe con tus propias palabras las reglas para realizar una suma algebraica

---

---

---

14 Escribe las reglas de la multiplicación y división algebraicas: \_\_\_\_\_

---

---

Realiza las siguientes operaciones aplicando las reglas de la adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación algebraicas.

15)  $-36 + 48 =$

16)  $-25 - 25 =$

17)  $45 - 70 =$

18)  $21 - 15 =$

19)  $-15 + 15 =$

20)  $-92 - 45 =$

21)  $3(-5) =$

22)  $-8(-9) =$

23)  $12(-5) =$

24)  $7(-6) =$

25)  $0(-3) =$

26)  $\frac{-16}{-4} =$

27)  $\frac{24}{-8} =$

28)  $\frac{-12}{12} =$

29)  $\frac{0}{-16} =$

30)  $\frac{4}{4} =$

31)  $(-7)^4 =$

32)  $12^3 =$

33)  $-\sqrt{81}$

34)  $\sqrt[3]{-1}$

35)  $-8 - 12 - 23 - 15 - 4 - 7 =$

a) 69

b) 7

c) -69

d) -7

36)  $4 + 10 - 5 - 13 + 12 - 15 =$

a) -7

b) 14

c) 7

d) -21

37)  $-12 + 18 - 19 - 25 + 24 - 35 =$

a) 40

b) -49

c) 49

d) -40

38)  $6 - 8 + (-20) - (-25) =$

a) -5

b) 3

c) -20

d) 6

**Prioridad de las operaciones.**

Cuando en una expresión numérica interviene más de una operación, como por ejemplo en:

$$\frac{4^3 - \sqrt{16}}{\frac{12}{2} - 3(-2)} =$$

para realizarla se utiliza la prioridad de las operaciones que se indica a continuación:

Primero se realizan las potencias y raíces.

Enseguida se realizan las multiplicaciones y divisiones.

Al final se realizan las adiciones y sustracciones.

Sin embargo es importante que consideres que cuando hay paréntesis debes efectuar las operaciones que involucran ya que si bien son solo signos de agrupación, es necesario operar las agrupaciones que involucran.

**Ejemplo:**  $\frac{4^3 - \sqrt{16}}{\frac{12}{2} - 3(-2)} = \frac{64 - 4}{6 - 3(-2)} = \frac{60}{6 + 6} = \frac{60}{12} = 5$

**Ejercicios:**

1) ¿Cuál es la prioridad de las operaciones? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

2) ¿Cuáles son las operaciones básicas? \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3) ¿En la operación  $7 - 2^3$  que operación realizas primero y por qué? \_\_\_\_\_

4) ¿En la expresión  $5\sqrt{36}$  que operación harías al final? \_\_\_\_\_

5) ¿En la operación  $4(5^2 - 3)$  cuál sería la 2ª en prioridad? \_\_\_\_\_

Efectúa las siguientes operaciones:

6)  $-2^3 + 3\sqrt{4} + 6(-2) =$

a) 14

b) -3

c) 0

d) -14

7)  $(-4 + 2)^3 - 4\sqrt{4 + 5} + 8(-3)^2 =$

a) 0

b) 52

c) 68

d) -52

8)  $18 \div 3 - 4(-2)^3 + 7 =$

a) 34

b) -45

c) 45

d) 0

- 9)  $4(6 + 24) + 0(17 + 25) =$   
 a) 24                      b) 162                      c) 96                      d) 120
- 10)  $-3(7 - 8) + 2(-17 + 13) - 4(-8 + 5 - 3)$  es:  
 a) 0                      b) 19                      c) -14                      d) -19
- 11)  $5 - 3(-8 + 5) + 4 - 2(-2 - 3) + 6$  es:  
 a) -34                      b) 43                      c) -43                      d) 34
- 12)  $(15 \div 3)5 - 4 \times 3(-1) - 27 \div 3 =$   
 a) 28                      b) 0                      c)  $\frac{10}{3}$                       d) 4
- 13)  $(-8 + 3)(7 - 3) \div ((-30 + 25)(-4 + 8))$  es:  
 a) 0                      b) -16                      c) 1                      d) -20
- 14)  $13\{-20 + 3[12 - 3(7 - 3) + 2(4 - 5) - 3(-8 + 2) - 10] - 12\} =$   
 a) 208                      b) -182                      c) 182                      d) -208
- 15)  $6 + 5(3 - 5)2^3 - 3(4 - 6)^2 =$   
 a) -86                      b) -188                      c) -26                      d) -68

### Números Racionales

Los números racionales son aquellos números que se pueden expresar como la razón de dos números enteros, siendo el denominador diferente de cero. Se denota con la letra  $Z$  y se define como:

$$Z = \left\{ x / x = \frac{a}{b}, a \text{ y } b \in Z, b \neq 0 \right\}$$

Ejemplo:  $2, -4, -\frac{1}{5}, -\frac{10}{3}, 0$

#### Distintos significados y representaciones.

Los números fraccionarios tienen diferentes representaciones, tales como:

a) Fracciones común:  $\frac{5}{3}, \frac{11}{9}, \frac{1}{7}, \dots$

b) Fracciones decimales:  $0.6, 0.\overline{142857}, 1.8, \dots$

c) Porcentaje o tanto por ciento, que es una o varias partes de las cien en que se divide un número: 12%, 3%, 1.7%, ...

d) Fracciones equivalentes, que son las fracciones que representan el mismo valor pero se escriben de manera diferente:  $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{26}{39} = \dots$ , pero su forma decimal es la misma.

**Ejercicios:**

1) Número racional es: \_\_\_\_\_

2) Los siguientes números  $\frac{3}{4}, -\frac{2}{5}, \frac{16}{3}, \frac{7}{9}, -5, 8, 0$  son: \_\_\_\_\_

3) El 2.5% de 250 es:

- a) 6.25      b) 65.0      c) 0.625      d) 62.5      e) 187.50

4) 42 es el 15% de:

- a) 28      b) 280      c) 2 800      d) 28.28      e) 280.28

5) El 32% de 4.25 es:

- a) 0.136      b) 13.6      c) 0.0136      d) 1.36      e) 3.61

6) Un artículo que cuesta \$750 tiene el 20% de descuento hay que pagar por el:

- a) 600      b) 150      c) 6 000      d) 1 500      e) 60

7) Una fracción equivalente a  $\frac{63}{105}$  es:

- a)  $\frac{5}{3}$       b)  $\frac{3}{4}$       c)  $\frac{3}{5}$       d)  $\frac{21}{15}$       e)  $\frac{15}{21}$

8) Una fracción equivalente a  $\frac{9}{8}$  es:

- a)  $\frac{108}{96}$       b)  $\frac{96}{108}$       c)  $\frac{45}{32}$       d)  $\frac{48}{54}$       e)  $\frac{3}{4}$

9) La fracción decimal 0.35 es equivalente a:

- a)  $\frac{350}{100}$       b)  $\frac{7}{20}$       c)  $\frac{35}{1000}$       d)  $\frac{7}{25}$       e)  $\frac{20}{7}$

10) La fracción decimal 0.16 es equivalente a:

- a)  $\frac{25}{4}$       b)  $\frac{4}{25}$       c)  $\frac{16}{10}$       d)  $\frac{16}{1000}$       e)  $\frac{5}{3}$

11) La fracción común  $\frac{9}{4}$  es equivalente a:

- a) 0.225      b) 22.5      c) 2.25      d) 2.52      e) 5.22

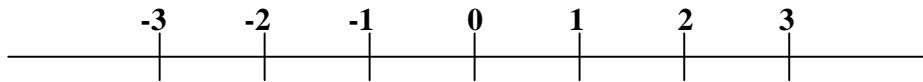
12) La fracción común  $\frac{3}{5}$  es equivalente a:

- a) 1.6      b) 0.16      c) 0.006      d) 0.06      e) 0.6

### Orden, representación gráfica en la recta numérica

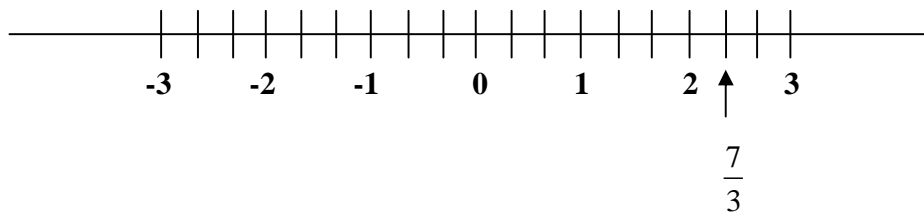
Para representar los números racionales en la recta numérica, procedemos de la siguiente manera.

Ubicamos los números enteros.



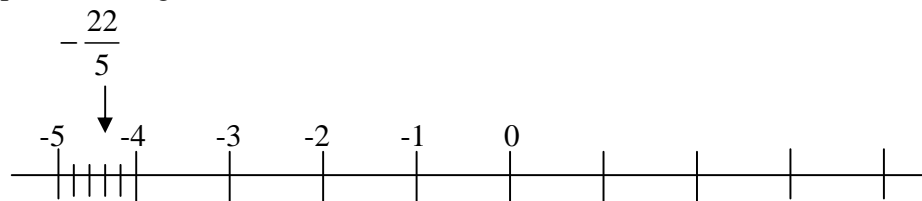
#### Ejemplo 1.

Para ubicar  $\frac{7}{3}$ , 3 dividimos cada entero en 3 partes iguales y se cuentan las 7 partes desde el origen.



#### Ejemplo 2.

Para ubicar  $-\frac{22}{5}$ , dividimos cada entero en 5 partes iguales y contamos las 22 hacia la izquierda a partir del origen.

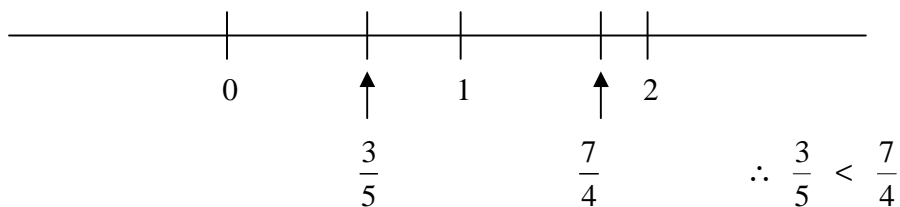


Los números racionales al poderse ubicar en la recta numérica, también tienen un orden y el criterio para saber cual es menor o mayor en la recta numérica es el mismo que el de los números enteros, es decir, es mayor el que está a la derecha del otro, pero existen otros métodos que a continuación se explicaran.

#### Ejemplo 3.

¿Cuál de los números  $\frac{7}{4}$  ó  $\frac{3}{5}$  es menor?

- Utilizando la recta numérica





- Haciendo una multiplicación cruzada, es mayor la fracción cuyo numerador genera el producto mayor.

$$\frac{3}{5} \quad \frac{7}{4}$$

como  $12 < 35$  y el 35 es el producto mayor,

$$\therefore \frac{3}{5} < \frac{7}{4}$$

### Ejercicios:

1) En la recta numérica un número positivo que se aleja mas del cero es \_\_\_\_\_ que un número positivo que se aleja menos del cero.

2) Dados dos números  $a$  y  $b$  en la recta numérica solo puede ocurrir una de las siguientes tres afirmaciones.

$$a > b, \quad b > a, \quad a = b$$

a esta propiedad de los números se le conoce como: \_\_\_\_\_

3) Determina si son falsas o verdaderas las siguientes afirmaciones.

a) Si en una fracción el numerador es mayor que el denominador, ambos positivos, entonces la fracción es mayor que uno.

b) Si al convertir una fracción a decimal el residuo es cero, entonces la fracción decimal es periódica. \_\_\_\_\_

c) El valor absoluto de un número racional siempre es mayor que cero. \_\_\_\_\_

d) El recíproco de  $-\frac{1}{2}$  es  $-2$ . \_\_\_\_\_

e)  $0.12$  es equivalente a  $\frac{3}{25}$  \_\_\_\_\_

4) Para la siguientes parejas de números coloca el signo de  $>$ ,  $<$  ó  $=$  para que la proposición sea verdadera.

a)  $\frac{3}{7}$  \_\_\_\_\_  $\frac{2}{5}$

f)  $\frac{5}{8}$  \_\_\_\_\_  $.9$

b)  $-\frac{9}{2}$  \_\_\_\_\_  $3$

g)  $-\frac{14}{3}$  \_\_\_\_\_  $-2$

c)  $-\frac{8}{7}$  \_\_\_\_\_  $-\frac{16}{14}$

h)  $.3$  \_\_\_\_\_  $-\frac{1}{3}$

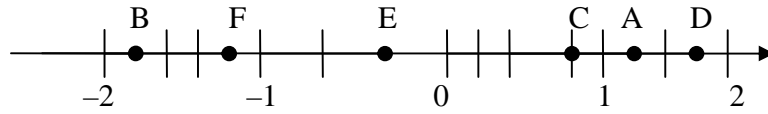
d)  $\frac{10}{14}$  \_\_\_\_\_  $-\frac{5}{7}$

i)  $0.4$  \_\_\_\_\_  $\frac{2}{5}$

e)  $\frac{27}{30}$  \_\_\_\_\_  $\frac{9}{10}$

j)  $-\frac{2}{3}$  \_\_\_\_\_  $-\frac{4}{7}$

5) Identifica en la recta numérica cada una de las fracciones y escribe en la línea la letra que le corresponde.



a)  $-\frac{9}{5}$  \_\_\_\_\_      b)  $-\frac{6}{5}$  \_\_\_\_\_      c)  $\frac{9}{5}$  \_\_\_\_\_

d)  $\frac{3}{4}$  \_\_\_\_\_      e)  $-\frac{1}{3}$  \_\_\_\_\_      f)  $\frac{7}{5}$  \_\_\_\_\_

6) Completa:

	FRACCIÓN DECIMAL	NÚMERO DECIMAL	LECTURA DEL NÚMERO DECIMAL
a)	$\frac{2}{100}$		
b)		3.5	
c)			Dos mil setenta y dos milésimos

7) Expresa las siguientes fracciones comunes en forma decimal y luego ordénalas y colócalas en los cuadros, de manera que se cumpla la relación que se pide.

a)  $\frac{5}{10} =$       b)  $-\frac{5}{8} =$       c)  $\frac{3}{8} =$       d)  $-\frac{5}{3} =$

>  >  >

8) Localiza en la recta numérica.

a)  $\frac{3}{4}$

f)  $-\frac{23}{5}$

b)  $\frac{6}{5}$

g)  $\frac{12}{7}$

c)  $-\frac{13}{2}$

h)  $\frac{9}{10}$

d)  $-\frac{25}{3}$

i)  $-\frac{25}{6}$

e)  $\frac{9}{8}$

j)  $-\frac{9}{8}$

9) Localiza en la misma recta numérica, las siguientes fracciones e indica la que es mayor.

a)  $\frac{1}{2}; \frac{5}{4}$

b)  $\frac{4}{3}; \frac{5}{6}$

c)  $\frac{13}{15}; \frac{1}{10}$

d)  $\frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{13}{6}$

e)  $\frac{2}{3}; \frac{5}{4}; \frac{7}{12}$

10) Anota el signo  $>$ ,  $<$ ,  $=$  para que la proposición sea verdadera.

a)  $\frac{3}{8} \quad \frac{2}{5}$

b)  $\frac{5}{6} \quad \frac{5}{4}$

c)  $\frac{6}{12} \quad \frac{2}{4}$

d)  $\frac{9}{6} \quad \frac{15}{10}$

e)  $-\frac{7}{3} \quad -\frac{4}{3}$

11) Escribe tres fracciones equivalentes a las presentadas que tengan mayor denominador que el mostrado.

a)  $\frac{3}{4} =$

b)  $-\frac{7}{5} =$

c)  $-3 =$

d)  $-\frac{1}{7} =$

e)  $\frac{3}{2} =$

12) Simplifica las fracciones.

a)  $\frac{18}{24} =$

b)  $-\frac{20}{100} =$

c)  $\frac{120}{105} =$

d)  $\frac{126}{231} =$

e)  $\frac{144}{180} =$

13) Determina una fracción que se ubique entre los dos números mostrados.

a)  $\frac{3}{5}; \frac{4}{5}$       b)  $\frac{8}{9}; \frac{9}{9}$       c)  $-\frac{5}{6}; \frac{4}{6}$       d)  $-\frac{1}{10}; 0$       e)  $\frac{7}{16}; \frac{1}{2}$

### Operaciones básicas con números racionales.

Las operaciones que se pueden realizar con números racionales son: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Para realizar las operaciones básicas con números racionales se procede igual que con los números enteros, solo que cuando son fraccionarios hay que cumplir ciertas reglas.

Las **reglas** para efectuar operaciones algebraicas con número racionales son iguales que las de enteros con respecto a los signos.

Para realizar las sumas algebraicas (sumas y restas aritméticas) cuando los números son fraccionarios comunes, es necesario que los denominadores sean iguales, procediéndose a sumar algebraicamente los numeradores.

**Ejemplo 1.**  $\frac{7}{5} + \frac{1}{5} = \frac{7+1}{5} = \frac{8}{5}$  ó  $\frac{7}{4} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} = \frac{7+5-1}{4} = \frac{11}{4}$  ó  $\frac{2}{3} - 4 = \frac{2-12}{3} = -\frac{10}{3}$

En caso de que las fracciones no tengan el mismo denominador hay que proceder a convertirlas a fracciones equivalentes con el mismo denominador, lo cual se consigue utilizando el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores de las fracciones que se suman.

**Ejemplo 2.** Al sumar  $\frac{7}{3} + \frac{2}{5}$ , como los denominadores son diferentes, se calcula el m.c.m.

de 3 y 5 que es 15, quedando que  $\frac{7}{3} = \frac{35}{15}$  y  $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ , lo cual se puede obtener directamente al dividir al m.c.m. entre cada denominador y multiplicarlo por el numerador correspondiente, obteniéndose:  $\frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{35+6}{15} = \frac{41}{15}$

**Ejemplo 3.** Al restar 4 a  $\frac{2}{3}$ , se procede de igual modo, es decir, se obtiene el m.c.m. de los

denominadores que es este caso es 3, y se obtiene:  $\frac{2}{3} - 4 = \frac{2-12}{3} = -\frac{10}{3}$

**Ejemplo 4.** Para obtener la suma de:

$$\frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{11}{45}$$

Primero se busca el mcm (mínimo común múltiplo).

$$10 = 2 \times 5$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$m.c.m. = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

$$y \quad \frac{3}{10} + \frac{5}{6} - \frac{11}{45} = \frac{27 + 75 - 22}{90} = \frac{80}{90} = \frac{8}{9}$$

Para **multiplicar** números fraccionarios comunes, basta multiplicar numerador por numerador para obtener el numerador del producto y denominador por denominador para obtener el denominador del producto.

**Ejemplo 5.** Al multiplicar  $-\frac{3}{5}$  por  $\frac{7}{4}$ , basta con multiplicar  $3 \times 7$  y  $5 \times 4$  para obtener el producto, considerando que los números son de signo contrario, el producto es negativo por lo que se:  $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{4} = -\frac{21}{20}$

**Ejemplo 6.** Al multiplicar  $5$  por  $\frac{3}{7}$ , tienes que recordar que el denominador de  $5$  es  $1$  por lo que se tiene:  $5 \times \frac{3}{7} = \frac{15}{7}$  que es positivo por que los dos números son del mismo signo.

Para **dividir** fracciones comunes, basta con multiplicar el numerador de la fracción dividendo por el denominador de la fracción divisor para obtener el numerador del cociente y multiplicar el denominador del dividendo por el numerador del divisor para obtener el denominador del cociente.

**Ejemplo 7.** Al dividir  $-\frac{3}{7}$  entre  $-\frac{2}{3}$ , basta con multiplicar  $3 \times 3$  y  $7 \times 2$  para obtener el cociente, considerando que los números son del mismo signo, el cociente es positivo por lo que se:  $\left(-\frac{3}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{14}$

**Ejemplo 8.** Al dividir  $\frac{3}{4}$  entre  $-7$ , tienes que recordar que el denominador de  $-7$  es  $1$  por lo que hay que multiplicar  $3 \times 1$  y  $4 \times 7$  y como los números son de signo contrario el cociente es negativo, por lo que se tiene:  $\frac{3}{4} \div (-7) = -\frac{3}{28}$

Para la **potenciación** de fracciones comunes, se sigue el procedimiento de la multiplicación de fracciones, solo es necesario tener cuidado con que el exponente afecta tanto al numerador como al denominador de la fracción.

**Ejemplo 9.** Para obtener la potencia de  $\left(\frac{2}{3}\right)^4$  solo hay que multiplicar al  $2$  y al  $3$  por sí mismos  $4$  veces, quedando:  $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{16}{81}$

Para la **radicación** se siguen las reglas de la de los números enteros, extrayendo la raíz correspondiente a cada elemento de la fracción.

**Ejemplo 10.** Para obtener la raíz de  $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}$  solo hay que extraer la raíz cúbica de  $1$  y la raíz cúbica de  $8$  y como es una raíz de grado impar de un número negativo, la raíz es negativa, quedando:  $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{8}} = -\frac{1}{2}$

**Prioridad de las operaciones. Uso de signos de agrupación y prioridad del cálculo.**

La prioridad de las operaciones con los números racionales es la misma que la establecida para números enteros, es decir:

Primero se realizan las potencias y raíces.

Enseguida se realizan las multiplicaciones y divisiones.

Al final se realizan las adiciones y sustracciones.

Las operaciones presentadas en signos de agrupación (paréntesis) se realizan primero utilizando el mismo orden de prioridad

**Ejercicios:**

1.  $\frac{9}{10} + \frac{13}{10} - \frac{5}{10} =$

a)  $\frac{1}{10}$

b)  $\frac{8}{10}$

c)  $\frac{4}{10}$

d)  $\frac{17}{10}$

2.  $\frac{4}{3} - \frac{3}{7} - \frac{6}{14} =$

a)  $\frac{5}{7}$

b)  $\frac{10}{14}$

c)  $\frac{10}{21}$

d)  $\frac{5}{3}$

3.  $\frac{7}{6} \times \frac{1}{21} - \frac{4}{9} =$

a)  $-\frac{7}{18}$

b)  $\frac{7}{126}$

c)  $-\frac{3}{21}$

d)  $\frac{28}{54}$

4.  $\frac{39}{63} \div \left( \frac{26}{24} \times \frac{63}{57} \right)$

a)  $\frac{106}{1043}$

b)  $\frac{1064}{143}$

c)  $\frac{354}{477}$

d)  $\frac{76}{147}$

5.  $\frac{7}{5} + \frac{10}{5} + \frac{4}{5} =$

a)  $\frac{280}{125}$

b)  $\frac{21}{15}$

c)  $\frac{21}{5}$

d)  $\frac{5}{21}$

e)  $-\frac{21}{5}$

6.  $\frac{4}{3} - \frac{5}{3} + \frac{8}{3} =$

a)  $\frac{3}{7}$

b)  $\frac{7}{3}$

c)  $-\frac{7}{3}$

d)  $\frac{7}{9}$

e)  $\frac{9}{7}$

7.  $-\frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{9}{2} =$

a)  $-\frac{53}{100}$

b)  $-\frac{10}{53}$

c)  $\frac{53}{5}$

d)  $\frac{5}{53}$

e)  $\frac{53}{10}$

8.  $\frac{7}{6} \times \frac{3}{14} - \frac{20}{3} =$

a)  $-\frac{77}{12}$

b)  $\frac{77}{12}$

c)  $-\frac{12}{77}$

d)  $\frac{12}{77}$

e)  $\frac{77}{120}$

9.  $\frac{37}{5} - \frac{14}{5} + \frac{1}{5} =$   
 a)  $\frac{24}{15}$       b)  $\frac{24}{125}$       c)  $\frac{24}{5}$       d)  $-\frac{24}{5}$       e)  $-\frac{24}{15}$
10.  $\frac{11}{3} + \frac{13}{6} - 5 =$   
 a)  $\frac{5}{6}$       b)  $-\frac{5}{6}$       c)  $\frac{6}{5}$       d)  $-\frac{6}{5}$       e)  $\frac{1}{18}$
11.  $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{5}} + \frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{3}} =$   
 a)  $-\frac{28}{3}$       b)  $\frac{28}{6}$       c)  $\frac{3}{28}$       d)  $\frac{28}{3}$       e)  $\frac{14}{3}$
12.  $\frac{8}{9} - \frac{7}{20} + \frac{14}{5} =$   
 a)  $\frac{180}{601}$       b)  $\frac{601}{180}$       c)  $-\frac{601}{180}$       d)  $\frac{160}{810}$       e)  $\frac{-180}{601}$

### Operaciones con potencias y radicales.

En ocasiones es necesario combinar las potencias y radicales con las demás operaciones para obtener resultados de procesos más complejos por lo que es importante conocer y aplicar todas sus leyes.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^m = a^m b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

$$(a+b)^n \neq a^n + b^n$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Dentro de las operaciones que están sujetas a las leyes de exponentes, se tiene la reducción la suma algebraica, la multiplicación y la división de radicales, que aunque son números irracionales, lo trataremos en este momento.

**Ejemplo 1.** Para reducir  $\sqrt{20}$ , basta con factorizar el 20 y observar que factores tienen raíz cuadrada exacta

$$\sqrt{20} = \sqrt{2 \times 2 \times 5} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

**Ejemplo 2.** Si deseas adicionar  $\sqrt{8}$  con  $\sqrt{18}$ , la prioridad de operaciones **no te permite** considerar que el resultado es  $\sqrt{26}$  ya que primero debes obtener la raíz y después sumar y  $\sqrt{26}$  resulta de primero sumar y después extraer la raíz cuadrada.

Para poder efectuar la suma  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ , es necesario que primero factorices a los enteros que son los radicandos y extraigas las raíces cuadradas exactas y enseguida procedas a reducir los términos semejantes resultantes, y posteriormente obtener solo una raíz cuadrada que es el resultado de la adición de los radicales o números irracionales  $\sqrt{8}$  y  $\sqrt{18}$ , obteniéndose:

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{4} \sqrt{2} + \sqrt{9} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

*reduciendo los términos semejantes*

$$(2 + 3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

*como 5 es la raíz cuadrada de 25, queda :*

$$\sqrt{25} \sqrt{2} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{50}$$

Como puedes observar al  $\sqrt{8} + \sqrt{18}$  no se obtuvo  $\sqrt{26}$  sino  $\sqrt{50}$

Para multiplicar o dividir radicales es necesario que los índices de las raíces sean iguales.

**Ejemplo 3.** Si deseas multiplicar  $\sqrt{30}$  y  $\sqrt{120}$ , basta con multiplicar los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\sqrt{30} \sqrt{120} = \sqrt{30 \times 120} = \sqrt{3600} = 60$$

**Ejemplo 4.** Si desea dividir  $\sqrt[3]{126}$  entre  $\sqrt[3]{6}$ , basta con dividir los radicandos ya que las raíces son del mismo grado, quedando:

$$\frac{\sqrt[3]{126}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\frac{126}{6}} = \sqrt[3]{21}$$

Como puedes observar, el resultado de la multiplicación o de la división puede ser un número racional o número irracional.

### Ejercicios.

1) De acuerdo a las leyes anteriores, escribe si es Verdadera o Falsa cada una de las siguientes proposiciones:.

a)  $a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{ab}$  \_\_\_\_\_

b)  $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$  \_\_\_\_\_

c)  $(a+b)^2 = a^2 + b^2$  \_\_\_\_\_

d)  $x^0$  siempre es 1 \_\_\_\_\_

e)  $(-5)^n$  siempre es negativo \_\_\_\_\_



2) Escribe el resultado de cada una de las siguientes expresiones:

a)  $-3^2 =$

d)  $(-4)^3 =$

b)  $(-3)^2 =$

e)  $-(-2)^3 =$

c)  $-4^3 =$

f)  $-(-2)^4 =$

3) Califica como falsa o verdadera cada una de las afirmaciones.

a)  $\sqrt[n]{2^n 3^n} = 2 \times 3$  \_\_\_\_\_

b)  $\sqrt[n]{4^n + 3^n} = 4^n + 3^n$  \_\_\_\_\_

c)  $\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[m]{2} = \sqrt[m]{2^{m+n}}$  \_\_\_\_\_

d)  $\sqrt[n]{3^m} = (\sqrt[n]{3})^m$  \_\_\_\_\_

e)  $\sqrt[n]{2^n 3} = 2\sqrt[n]{3}$  \_\_\_\_\_

4) Explica con tus propias palabras.

a)  $\sqrt[n]{x}$  cuando  $n$  es impar y  $x$  es cualquier número siempre es posible encontrar la solución, pero si  $n$  es par ¿qué sucede? \_\_\_\_\_

b) ¿Por qué se dice que  $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ ? \_\_\_\_\_

c) ¿Qué tipo de número se obtiene al multiplicar dos números irracionales? \_\_\_\_\_

d) ¿3.01001000100001..... es racional o irracional? \_\_\_\_\_

5) Anota una x en el conjunto a que pertenecen los siguientes números.

	Numero	natural	entero	racional	irracional	real
a)	-345					
b)	23					
c)	$3\sqrt{5}$					
d)	$-\frac{4}{3}$					
e)	$\sqrt{-25}$					

6) Simplifica los siguientes radicales.

a)  $\sqrt{64} =$

d)  $\sqrt[3]{16} =$

b)  $\sqrt{8} =$

e)  $\sqrt[3]{81} =$

c)  $\sqrt{12} =$

f)  $\sqrt[3]{128} =$

7) Resuelve las siguientes operaciones con radicales.

a)  $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{64} =$

b)  $3\sqrt{2} - 5\sqrt{5} + \sqrt{32} + \sqrt{20} =$

c)  $\sqrt{2}\sqrt{8} =$

d)  $\sqrt[3]{4\sqrt[3]{2}} =$

e)  $-8\sqrt{3}\sqrt{7} =$

f)  $(3\sqrt{2})^2 =$

g)  $(-5\sqrt{2})^4 =$

h)  $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} =$

i)  $\frac{\sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{2}} =$

j)  $\frac{\sqrt[4]{156}}{\sqrt[4]{4}} =$

### Problemas diversos de corte Aritmético

Existen diversas aplicaciones de los números para resolver problemas, a continuación, con base en lo estudiado hasta la sección, te proponemos diversos problemas que involucran la aplicación de los números reales.

#### Ejercicios:

1) Un campesino fue a la ciudad, la primera mitad del camino fue en tren, 15 veces más de prisa que si hubiera ido caminando. Pero la segunda mitad del camino tuvo que hacerla en una carreta jalada por bueyes, dos veces más despacio que a pie. ¿Cuánto tiempo ganó o perdió en comparación en el caso en que hubiera ido todo el tiempo a pie?

2) Un caracol decidió subir un árbol de 15 metros de altura. Durante cada día tenía el tiempo de subir 5 metro; pero mientras dormía por la noche, bajaba 4 metros. ¿Al cabo de cuántos días llegó a la cima del árbol?

3) Escriba siete cifras del 1 al 7, una detrás de otra. Esto es, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Estas cifras pueden unirse entre sí por medio de los signos más y menos, de modo que se obtenga, el resultado 40, como sigue:  $12 + 34 - 5 + 6 - 7 = 40$

Encontrar con estas mismas cifras una combinación que de 55.

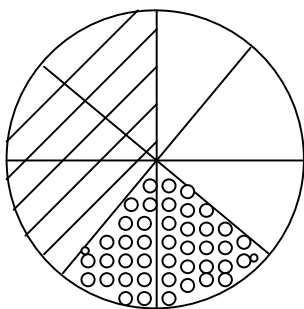
4) De lunes a viernes, en periodos normales, un estudiante distribuye, en promedio, las horas del día de la siguiente manera:

ACTIVIDAD	FRACCION DEL DIA DESTINADA
Dormir	$\frac{1}{3}$
Alimentación	$\frac{1}{12}$
Descanso y diversión	$\frac{1}{6}$
Estudio	$\frac{1}{4}$
Aseo personal	$\frac{1}{24}$
Tareas y trabajos	$\frac{1}{8}$




- ¿A que actividad se dedica más tiempo?
- ¿A que actividad se dedica menos tiempo?

5) . Si un pintor se llevo 1 y medio días en pintar los marcos de las ventanas de una casa, 1 día  $\frac{3}{4}$  de día pintar el techo y 2 días  $\frac{1}{8}$  de día el resto de la casa, ¿cuántos días en total requirió el trabajo?

6) La siguiente gráfica representa la distribución general del gasto mensual de una familia.



- ¿Qué parte del presupuesto gasta en alimentos y vestido?
- ¿Qué parte del presupuesto gasta en pagos de la casa?
- ¿Qué parte del presupuesto dedica a gasto varios?
- ¿Qué parte del presupuesto gasta la familia en alimento, vestido y gastos varios?
- ¿Qué parte del presupuesto gasta en alimentos, vestidos y pagos de la casa?

-  Alimentos y vestidos
-  Gastos varios
-  Pagos de la casa

7) Un par de zapatos cuesta \$ 247.25 con I.V.A. (considera el I.V.A. de 15%), determina el precio de los zapatos sin I.V.A.

- a) \$ 200                      b) \$ 210.60                      c) \$ 215.00                      d) \$ 205.50

8) Un número al dividirlo entre 11 tiene cociente 7 y residuo 6. El número es:

- a) 72                      b) 94                      c) 105                      d) 83

9) Encuentra el numerador de la fracción equivalente a  $\frac{35}{70}$  cuyo denominador sea 24.

- a) 70                      b) 24                      c) 35                      d) 12

10) Un apicultor tiene una lata con 13 litros y medio de miel y quiere envasarla en botellas de  $\frac{3}{4}$  de litro para venderla, ¿Cuántas botellas necesita?

- a) 15                      b) 18                      c) 9                      d) 20

11) Si la pólvora se obtiene mezclando salitre, carbón y azufre. ¿Qué cantidad de pólvora se obtiene al mezclar  $\frac{50}{3}$  gramos de salitre,  $\frac{25}{9}$  gramos de carbón y  $\frac{8}{3}$  gramos de azufre?

- a)  $\frac{175}{9}$  gramos pólvora.                      B)  $\frac{199}{9}$  gramos pólvora.

- c)  $\frac{220}{9}$  gramos pólvora.                      D)  $\frac{245}{9}$  gramos pólvora.

12) Se envían por correo tres paquetes que en total pesan 5 kilogramos. Si uno pesa  $\frac{5}{3}$  Kg, otro pesa  $\frac{3}{2}$  Kg, ¿cuál será el peso del tercer paquete?

- a)  $\frac{11}{9}$  kilogramos.    B)  $\frac{11}{6}$  kilogramos.    C)  $\frac{19}{9}$  kilogramos.    D)  $\frac{19}{6}$  kilogramos.

## UNIDAD II. VARIACION DIRECTAMENTE PROPORCIONAL Y FUNCIONES LINEALES

Al finalizar esta unidad:

- Describirás verbalmente en que consiste el cambio y cuáles son los aspectos involucrados en él.
- Identificarás cual es la variable cuyos valores dependen de los que otra tome.
- Ante una serie de datos, una tabla o una situación verbal en donde se representa una variación proporcional directa:
  - Obtendrás los valores que se indiquen de  $x$  e  $y$  auxiliándote de patrones o reglas de 3.
  - Obtendrás o identificarás la constante de proporcionalidad.
  - Percibirás la relación que existe con la constante de proporcionalidad.
  - Localizarás en el plano cartesiano los puntos asociados a los datos.
  - A partir del análisis de la gráfica obtendrás la información de la situación a la que se representa y lo expresarás verbalmente.
  - Redactarás el contexto de una situación que corresponda a un modelo de variación.
- Ante una serie de datos, una tabla o una situación verbal en donde se representa una función lineal:
  - Transitarás por las diferentes formas de representación (tabular, gráfica y algebraica).
  - Distinguirás dentro del contexto de la situación si se trata de una variable discreta o continua.
  - Reconocerás los parámetros  $a$  y  $b$  de la función lineal y la información que proporcionan.
  - Graficarás funciones de la forma  $y = ax + b$  a partir de la información que proporcionan los parámetros  $a$  y  $b$ .

### Variación proporcional directa

Se dice que la variable  $y$  es directamente proporcional a la variable  $x$  si la razón de dos valores cualesquiera de  $y$  y  $x$  es constante, es decir, si:

$$y = kx \quad \text{con} \quad k \neq 0$$

$$k = \frac{y}{x}, \quad k \text{ es la constante de proporcionalidad o constante de variación.}$$

$x$  la variable independiente

$y$  la variable dependiente

**Ejercicios:**

1) Escribe con tus propias palabras, el concepto de:

- a) Función
- b) Variable independiente
- c) Variable dependiente

2) Escribe un ejemplo de variación directamente proporcional.

3) Determinar cuál es la variable dependiente e independiente y la función que describe a los datos de la siguiente tabla.

T	1	2	3	4	5
d	3	6	9	12	15

4) Determinar la variable dependiente e independiente del siguiente problema.

El perímetro (P) de un cuadrado es 4 veces el largo (S) de un lado.

5) Identifica la variable dependiente e independiente de la siguiente relación.

$$y = 1 - 2x$$

6) Si  $f(x) = -3x + 4$

Determina: a)  $f(1)$ , b)  $f(-1)$ , c)  $f(0)$

7) De las tablas de valores que aparecen abajo marca con X las que representen una relación de proporcionalidad directa entre las variables.

T	d
0	0
1	1
2	4
3	6
4	16
5	20

( )

f	P
10	2.5
20	5
30	7.5
40	10
50	12.5

( )

x	y
4	2
5	2.5
7	3.5
12	6
24	12
25	12.5

( )

z	S
1	0.8
2	0.4
3	0.2
4	0.1
5	0

( )

b	A
	5
75	3.66
55	...
35	2.33
15	...
5	1
	0.33
	...

( )

Escribe la expresión que corresponde a cada una de las relaciones directamente proporcionales \_\_\_\_\_

8) Completa las tablas de tal manera que la relación entre las variables sea de proporcionalidad directa. Debajo de cada una escribe la expresión que describe la relación.

U	v
1	7
2	—
3	—
4	—
5	—

g	F
1.7	1.7
3	3
4.5	4.5
9	9
11.	11.
8	8
21	21

m	E
.3	—
.5	—
.9	—
1	—
1.1	11

f	l
35	—
40	8
45	—
50	—
55	—
60	—

q	Q
7.5	—
10	—
5	2.4
15	—
25	—
20	—

w	P
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	—
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{5}{2}$	—

\_\_\_\_\_

9) En la proporción:  $\frac{12}{3} = \frac{28}{x}$ , determina el valor de x.

10) Los siguientes valores corresponden a variación proporcional directa, calcula el valor de la variable faltante en cada caso:

a)  $m_1 = 18, n_1 = 8$  y  $n_2 = 6$ , entonces  $m_2 =$  \_\_\_

b)  $p_1 = 21, v_2 = 6, v_1 = 3$ , entonces  $p_2 =$  \_\_\_

c)  $y_2 = 2.5, x_2 = 10$  y  $x_1 = 40$ , entonces  $y_1 =$  \_\_\_

d)  $g_1 = 1.5, h_2 = 10.95$  y  $g_2 = 7.3$ , entonces  $h_1 =$  \_\_\_

### Problemas de variación proporcional directa

#### Ejemplo 1:

La longitud de una sombra a determinada hora del día es de un metro y la altura del objeto es de 2 metros. ¿Qué altura tendrá un objeto cuya sombra será de 4 metros a la misma hora del día?

Solución:

Sea **L** la longitud de la sombra y **h** la altura, entonces:

$$L = kh$$

Para encontrar el valor de k, sustituimos los datos iniciales

$$L = 1\text{m}$$

$$h = 2\text{m}$$

Entonces:

$$(1) = k(2)$$

$$k = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2} h$$

Para encontrar la altura

$$h = 2L$$

$$h = 2 \times 4 = 8$$

Para una sombra de 4 metros la altura del objeto es de 8 metros.

### Ejemplo 2:

El peso de una esfera es proporcional al cubo de su radio. Una esfera de 5 cm. de radio pesa 10 gramos. Encontrar el peso de una esfera de 6 cm. de radio hecha del mismo material.

Solución:

Sea **P** el peso y **r** el radio en centímetros.

Entonces:

$$P = kr^3$$

Para determinar el valor de **k** sustituimos

$$P = 10 \text{ gr. y } r = 5 \text{ cm.}$$

$$10 = k(5)^3$$

$$10 = 125k$$

$$k = \frac{10}{125}$$

$$k = \frac{2}{25}$$

$$P = \frac{2}{25} (6)^3$$

$$= \frac{2}{25} (216) \quad \boxed{P = 17.28 \text{ gr.}}$$

### Funciones lineales

Una función lineal es de forma  $f(x) = ax + b$

### Formas de representación de una función lineal: tablas, gráficas y modelo algebraico.

Una función lineal puede representarse por tablas, gráficos o modelo algebraico, esto lo veremos así.

#### Ejemplo

Una cisterna recibe cierto volumen (**v**) de agua por minuto (**t**) como se muestra en la tabla:

t (min)	1	2	3	4	5
v (lt)	12.5	25	37.5	50	62.5

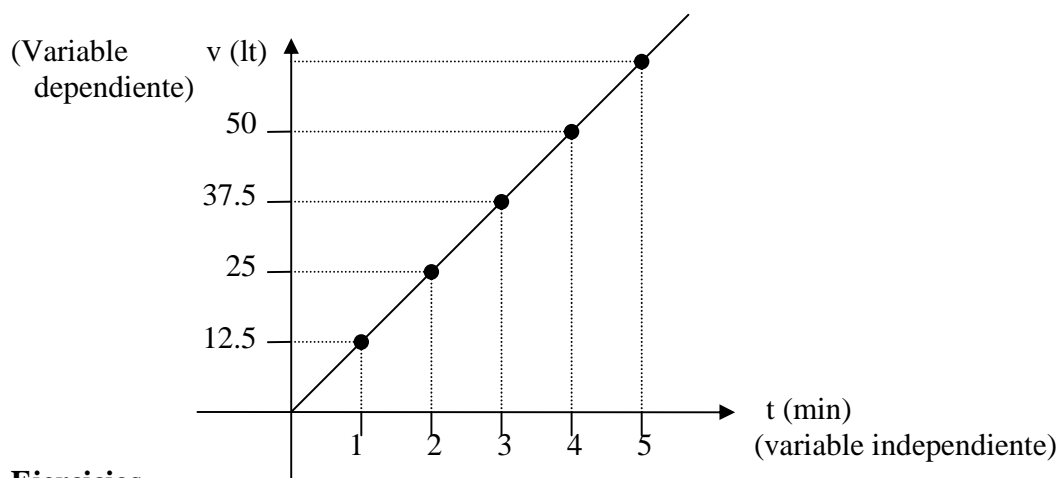
En la tabla observamos que se trata de una proporcionalidad directa, por que

$\frac{v}{t} = 12.5 \frac{\text{lt}}{\text{min}}$  por lo que el modelo algebraico que representa esta tabla es la función lineal:

$$v = 12.5t \quad \text{ó} \quad v(t) = 12.5t$$



los valores de la tabla o del modelo  $v(t) = 12.5t$ , se pueden representar en una gráfica, de la siguiente forma.



### Ejercicios

- 1) ¿Qué es una función lineal?
- 2) ¿Qué representaciones se pueden dar a una función lineal?
- 3) Representa en una tabla la siguiente función lineal:  
 $f(x) = 3x + 2$
- 4) Representa mediante una gráfica la función lineal.  
 $f(x) = 3x + 2$
- 5) Determina el modelo algebraico que represente la siguiente gráfica:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	1	3	5	7	9	11	13

### Variación lineal. Comparación entre los cambios de y respecto a las de x ( $\Delta y / \Delta x$ )

En una función lineal de la forma  $f(x) = ax + b$ , existe una variación importante, analicemos el siguiente

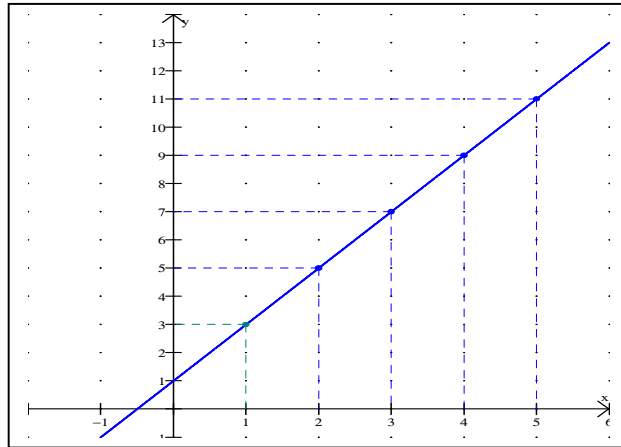
#### Ejemplo

Sea  $f(x) = 2x + 1$  y la tabla siguiente que representa este modelo:

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	3	5	7	9	11	13	15

Observa que la razón entre la variable dependiente y la independiente  $\frac{f(x)}{x}$  no tiene el mismo valor, por lo tanto no es una variación directamente proporcional.

Sin embargo, al analizar la gráfica de esta función se puede observar otra variación que si es constante.



Al variar  $x$  una unidad  $y$  aumenta 2 unidades, a las variaciones les llamaremos  $\Delta x$  (incremento de  $x$ ) y  $\Delta y$  (incremento de  $y$ ), la razón es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{1} = 2 \quad \text{que es una constante}$$

la cual se obtiene:

$\Delta y = y_2 - y_1$ , así por ejemplo:  $\Delta y = 5 - 3$  ó  $7 - 5$  ó  $9 - 7$ , etc.

Y  $\Delta x = x_2 - x_1$  y por ejemplo:  $\Delta x = 2 - 1$  ó  $3 - 2$  ó  $4 - 3$ , etc.

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{por ejemplo: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{9 - 3}{4 - 1} = \frac{6}{3} = 2$$

A esta razón se le llama pendiente de la recta.

### Ejercicios:

- 1) Define lo que es la pendiente de una recta
- 2) Con los datos de la siguiente tabla

x	0	1	2	3	4	5
y	2	6	10	14	18	22

- a) Determina si hay una variación directamente proporcional
  - b) Determina  $\Delta x$  para los puntos (1,6) y (4,18)
  - c) Determina  $\Delta y$  para los puntos (1,6) y (4,18)
  - d) Calcula  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  para los puntos (1,6) y (4,18)
  - e) ¿Cuál es la pendiente de esta función lineal?
- 3) Con los datos de la siguiente tabla, contesta las mismas preguntas de los incisos (a) al (e) del ejercicio anterior con las coordenadas de los puntos (1,2) y (4,8)

x	0	1	2	3	4
y	0	2	4	6	8

4) Determina la pendiente de la siguiente función lineal:

$$f(x) = 3x + 2$$

5) Al medir la estatura de un niño a partir de su nacimiento se obtuvieron los siguientes datos:

Edad (meses)	0	1	2	3	4	5
Estatura (cm.)	27	34	41	48	55	62

a) La estatura es la variable:

i) dependiente      ii) independiente      iii)proporcional

b) La edad es la variable:

i) dependiente      ii) independiente      iii)proporcional

c) Al calcular las razones entre la estatura y la edad se obtiene que:

i) La estatura es directamente proporcional a la edad.

ii) La edad es directamente proporcional a la estatura.

iv) La estatura no es directamente proporcional a la edad.

v) No hay variación.

### Análisis de los parámetros $a$ y $b$ en el comportamiento de la gráfica de $y = ax + b$

En una función lineal  $f(x) = ax + b$  además de  $a$  que corresponde a la pendiente de la recta tenemos a  $b$  que llamaremos **ordenada al origen** que es la ordenada del punto donde la recta corta al eje de las ordenadas.

Al graficar las siguientes funciones lineales, se obtienen las rectas:

$$y = 2x$$

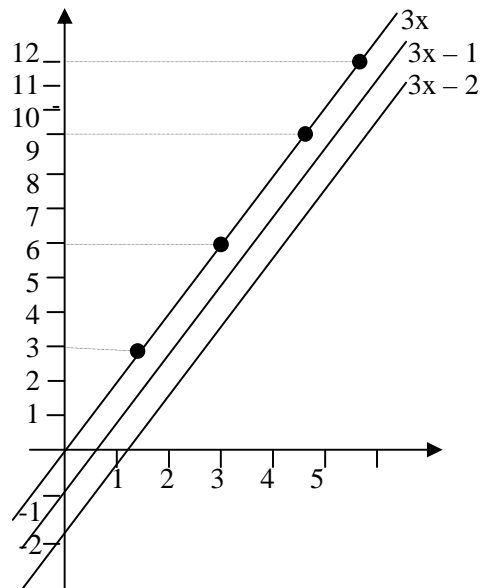
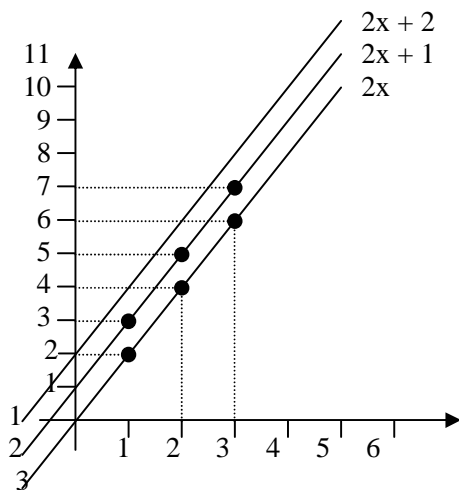
$$y = 3x$$

$$y = 2x + 1$$

$$y = 3x - 1$$

$$y = 2x + 2$$

$$y = 3x - 2$$



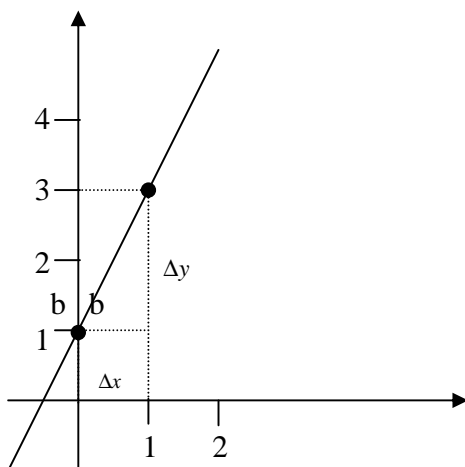
Observamos a los parámetros  $a$  que define la inclinación de la recta y  $b$  que es donde la recta corta al eje de las ordenadas.

En las dos gráficas se observa que el parámetro  $a$  es el mismo (2 en la primera y 3 en la segunda) por lo que las rectas tienen entre sí la misma inclinación y el parámetro  $b$  define el corte con el eje de las ordenadas (0,1, 2, -1 y -2).

**Vinculación entre  $a$  y el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .**

Estas rectas se pueden graficar ubicando la ordenada al origen y con la variación  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  de la siguiente forma:

Para graficar  $y = 2x + 1$ , sabemos que la ordenada al origen es  $b = 1$  y que la variación  $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2 = \frac{2}{1}$ , entonces en la gráfica se tiene que la recta corta al eje  $y$  en 1 y hay un punto en el plano que se encuentra considerando que  $\Delta y = 2$  corresponde a un segmento vertical de 2 unidades y  $\Delta x = 1$  corresponde a un segmento horizontal de 1 unidad, ambos desde el punto donde la recta corta el eje de las ordenadas, con lo cual se construye la gráfica de la recta.

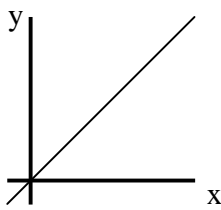


**Ejercicios:**

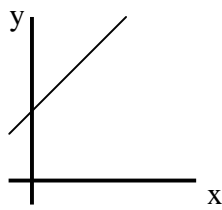
- 1) Si una recta coincide con el eje de las abscisas ¿Cuál es el valor de su pendiente? \_\_\_\_\_.
- 2) Escribe debajo de cada gráfica la ecuación que le corresponda:

a)

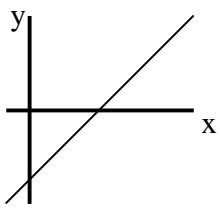
- $y = x + 5$
- $y = x - 5$
- $y = x$
- $y = 5$



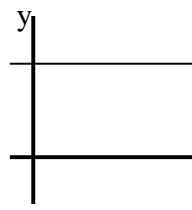
\_\_\_\_\_



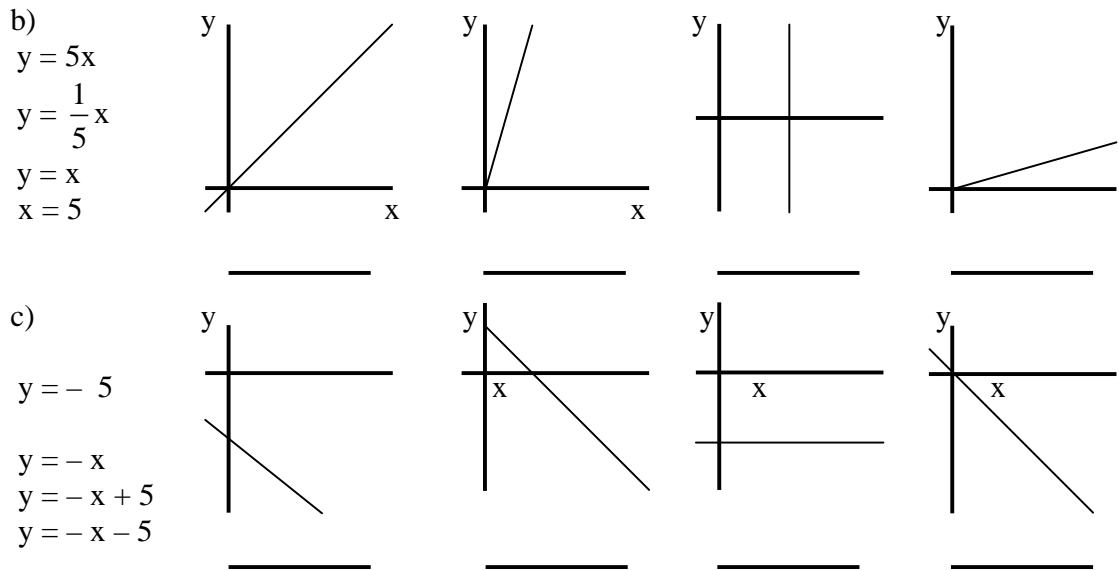
\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



\_\_\_\_\_



3) Si la ordenada al origen es la ordenada del punto donde una recta corta al eje de las ordenadas, ¿Cuál es la abscisa al origen? \_\_\_\_\_

4) ¿Qué es la rapidez de variación? \_\_\_\_\_

5) Se tiene una recta que pasa por el origen que se sabe que las coordenadas de uno de sus puntos son (6, 3). ¿Cuál es su pendiente? \_\_\_\_\_

6) Se tiene una recta que no pasa por el origen y se sabe que las coordenadas de uno de sus puntos son (6, 3). ¿Cuál es su pendiente? \_\_\_\_\_

7) Completa la tabla.

Ecuación	Pendiente	Ordenada al origen
$y = x$		
$y = 7x$		
$y = 4x + 9$		
$y = \frac{1}{2}x - 12$		
$y = -x$		
$y = -13x - \frac{3}{8}$		

### Situaciones de diversos contextos que se modelan con una función lineal.

Existen diversos problemas que se modelan con funciones lineales, a continuación resolveremos un problema como ejemplo.

#### Ejemplo:

En una empresa textil se fabrican 1.000 vestidos con un costo de \$ 75.000 y suponiendo que el costo es función lineal de la cantidad fabricada, determina en la tabla.

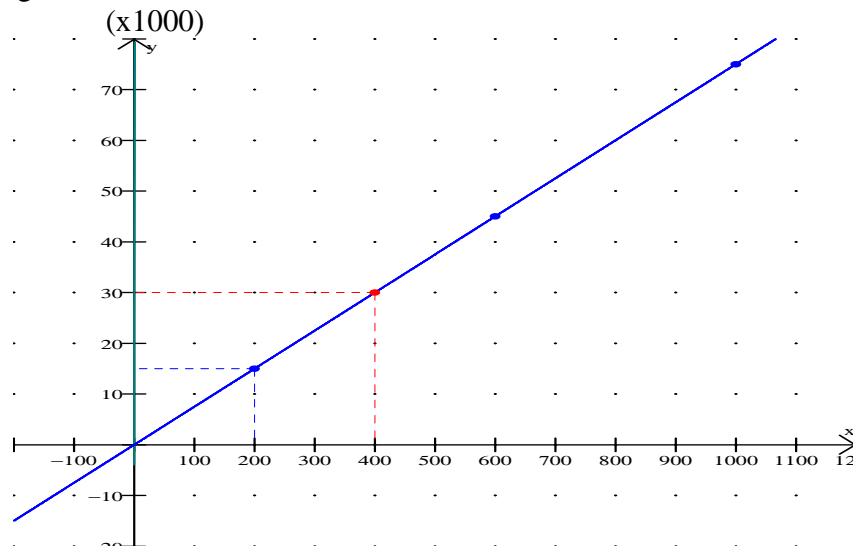
Tabla

vestidos	200	400	600	1000	
costo	15,000	30,000	45,000	75.000	

La variación que se observa es que por cada 400 vestidos aumenta 30,000 el costo por lo

$$\text{que } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30,000}{400} = 75 = a$$

Al construir la gráfica tenemos:



por lo que la ordenada al origen es cero, entonces la función lineal que lo representa es:

$$y = 75x$$

#### Ejercicios

- 1) En la fábrica de leche en polvo “La vaquita” el costo de elaboración de cada tonelada de leche es de \$ 250, el costo fijo de elaboración es aquel que tiene la fabrica independientemente de cantidad de leche que se envase es de \$ 5,000, determina la función lineal que representa el costo de elaboración dependiendo del número de toneladas que se elaboren.
- 2) El costo de una lavadora es de \$12,000 se espera que su servicio sea de 15 años, después de este tiempo su valor será solo de \$ 1,500, determina la ecuación lineal que representa la depreciación del costo de la lavadora.

## UNIDAD III. ECUACIONES LINEALES

**Al finalizar esta unidad:**

- Deberás haber incrementado tu capacidad para resolver problemas que conducen a ecuaciones lineales.

- Habrás mejorado tu manejo del lenguaje algebraico y podrás resolver cualquier ecuación lineal o de primer grado con una variable.

Para resolver problemas que involucren en su solución ecuaciones lineales es necesario que primero recuerdes y practiques los procesos que te conducen a simplificar y resolver esas ecuaciones lineales.

**Ecuación lineal con una variable.** Se dice que una ecuación lineal es la relación de igualdad de primer grado con una variable.

La solución de una ecuación lineal es el conjunto de valores que permite que la relación sea verdadera y se obtiene mediante procesos algebraicos cuyo sustento son las propiedades de los números reales, tales como la distributiva, la del elemento neutro aditivo, la del elemento neutro multiplicativo, etc.

Una ecuación lineal puede estar presentada de diferentes maneras, sin embargo para obtener su solución, los procesos de simplificación son los mismos.

La forma más simple de la ecuación es  $x = 3$ ,  $m = -5$ ,  $y = \frac{2}{5}$ , ...

**Ejemplo 1.** Para simplificar la ecuación  $3x + 2 = 5$

Sumamos a ambos miembros de la igualdad  $-2$ , que es el inverso aditivo de 2.

$$3x + 2 - 2 = 5 - 2$$

$$3x + 0 = 3$$

$$3x = 3$$

Multiplicamos a ambos miembros de la igualdad por  $\frac{1}{3}$ , que es el inverso multiplicativo de 3.

$$\frac{1}{3} \cdot 3x = 3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$x = 1$$

La solución de la ecuación es 1

**Ejemplo 2.** Para simplificar la ecuación  $\frac{x}{3} + 2x + 1 = 3$

Multiplicamos por 3 ambos miembros de la igualdad

$$3\left(\frac{x}{3} + 2x + 1\right) = 3 \times 3$$

$$x + 6x + 3 = 9$$

$$7x + 3 = 9$$

Sumando  $-3$  a ambos miembros de la igualdad

$$7x + 3 - 3 = 9 - 3$$

$$7x = 6$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por  $\frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7} \cdot 7x = \frac{1}{7} \cdot 6$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{6}{7}$$

$$x = \frac{6}{7}$$

La solución de la ecuación es  $\frac{6}{7}$

**Ejemplo 3.** Para simplificar la ecuación  $2(x+1) = 3(x-3)$

Eliminamos los paréntesis, aplicando la propiedad distributiva

$$2x + 2 = 3x - 9$$

Sumando  $-2$  a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$2x + 2 + (-2) = 3x - 9 + (-2)$$

$$2x + 2 - 2 = 3x - 9 - 2$$

$$2x + 0 = 3x - 11$$

$$2x = 3x - 11$$

Sumando  $-3x$  a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$2x + (-3x) = 3x - 11 + (-3x)$$

$$2x - 3x = 3x - 11 - 3x$$

$$2x - 3x = 0 - 11$$

$$-x = -11$$

Multiplicando a ambos miembros por el recíproco de  $-1$ , se tiene:

$$\frac{-x}{-1} = \frac{-11}{-1}$$

$$x = 11$$

La solución de la ecuación es 11

### Ejercicios:

Elige la forma más simple de la ecuación en cada uno de los siguientes ejercicios

1)  $5x = 3$

a)  $x = \frac{5}{3}$

b)  $x = -\frac{3}{2}$

c)  $x = \frac{3}{5}$

d)  $x = -\frac{3}{5}$

2)  $\frac{x}{3} = \frac{2}{3}$

a)  $x = 2$

b)  $x = -2$

c)  $x = 3$

d)  $x = -3$

3)  $2x + 3 = 7$

a)  $x = -2$

b)  $x = 2$

c)  $x = 5$

d)  $x = -5$

4)  $\frac{x}{2} + \frac{3}{2} = 7$

a)  $x = 17$

b)  $x = -11$

c)  $x = 1$

d)  $x = 11$



- 5)  $\frac{x}{6} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$   
 a)  $x = 5$       b)  $x = -6$       c)  $x = 6$       d)  $x = 0$
- 6)  $\frac{x}{2} - 2x + 3 = 6$   
 a)  $x = 0$       b)  $x = -2$       c)  $x = 1$       d)  $x = 2$
- 7)  $\frac{3x}{2} - x + \frac{1}{3} = \frac{7}{5}$   
 a)  $x = 1$       b)  $x = -3$       c)  $x = 2$       d)  $x = \frac{32}{15}$
- 8)  $2x + \frac{3}{2x} - 1 = \frac{5}{2}$   
 a)  $x = 1$       b)  $x = -2$       c)  $x = 3$       d)  $x = -1$
- 9)  $3(x+5) = 6(x-2)$   
 a)  $x = -1$       b)  $x = 9$       c)  $x = -8$       d)  $x = \frac{7}{3}$
- 10)  $\frac{3}{4}(2x+1) = \frac{2}{3}(x+1)$   
 a)  $x = -\frac{3}{10}$       b)  $x = \frac{1}{5}$       c)  $x = -\frac{1}{10}$       d)  $x = 0$
- 11)  $2(x+3) = 3(x+1)$   
 a)  $x = 2$       b)  $x = -2$       c)  $x = 3$       d)  $x = -3$
- 12)  $\frac{1}{2}(4x-2) = \frac{3}{2}\left(x - \frac{2}{3}\right)$   
 a)  $x = 0$       b)  $x = 2$       c)  $x = -2$       d)  $x = 1$
- 13)  $5x + 6 = 10x + 5$   
 a)  $x = -2$       b)  $x = \frac{1}{5}$       c)  $x = -\frac{1}{5}$       d)  $x = 5$       e)  $x = -5$
- 14)  $8x - 4 + 3x = 7x + x + 14$   
 a)  $x = 6$       b)  $x = -6$       c)  $x = \frac{1}{6}$       d)  $x = 3$       e)  $x = -2$
- 15)  $16 + 7x - 5 + x = 11x - 3 - x$   
 a)  $x = 5$       b)  $x = -7$       c)  $x = 2$       d)  $x = 7$       e)  $x = 4$
- 16)  $x - (2x+1) = 8 - (3x+3)$   
 a)  $x = 4$       b)  $x = -2$       c)  $x = 2$       d)  $x = -3$       e)  $x = 3$
- 17)  $5 - 3x + 4x - 6 = 8x + 11 - (3x - 6)$   
 a)  $x = -\frac{9}{2}$       b)  $x = \frac{2}{9}$       c)  $x = -\frac{2}{9}$       d)  $x = 2$       e)  $x = 9$
- 18)  $9 + 5(2x-1) + 7x = x + 2(x-5)$   
 a)  $x = 1$       b)  $x = -1$       c)  $x = 2$       d)  $x = -2$       e)  $x = \frac{1}{2}$

- 19)  $3x - (2x - 1) = 7x - (3 - 5x) + (-x + 24)$   
 a)  $x = 1$       b)  $x = 3$       c)  $x = 2$       d)  $x = -3$       e)  $x = -2$
- 20)  $x + 3(x - 1) = 6 - 4(2x + 3)$   
 a)  $x = -\frac{1}{4}$       b)  $x = \frac{1}{4}$       c)  $x = -4$       d)  $x = 4$       e)  $x = -\frac{4}{5}$
- 21)  $5(x - 1) + 16(2x + 3) = 3(2x - 7) - x$   
 a)  $x = 2$       b)  $x = -1$       c)  $x = -2$       d)  $x = \frac{1}{2}$       e)  $x = -\frac{1}{2}$
- 22)  $\frac{x}{6} + 5 = \frac{1}{3} - x$   
 a)  $x = 4$       b)  $x = \frac{1}{4}$       c)  $x = -4$       d)  $x = -\frac{1}{4}$       e)  $x = 2$
- 23)  $\frac{3x}{5} - \frac{2x}{3} + \frac{1}{5} = 0$   
 a)  $x = 3$       b)  $x = -3$       c)  $x = 1$       d)  $x = -2$       e)  $x = \frac{1}{3}$
- 24)  $x - \frac{x + 2}{12} = \frac{5x}{2}$   
 a)  $x = -2$       b)  $x = -\frac{2}{19}$       c)  $x = \frac{19}{2}$       d)  $x = \frac{2}{19}$       e)  $x = -19$
- 25)  $\frac{x}{2} + 2 - \frac{x}{12} = \frac{x}{6} - \frac{5}{4}$   
 a)  $x = -2$       b)  $x = 13$       c)  $x = 1$       d)  $x = 3$       e)  $x = -13$
- 26)  $\frac{x - 2}{3} - \frac{x - 3}{4} = \frac{x - 4}{5}$   
 a)  $x = \frac{53}{7}$       b)  $x = -\frac{53}{7}$       c)  $x = \frac{7}{53}$       d)  $x = -\frac{7}{53}$       e)  $x = -7$

Encuentra la solución de cada una de las siguientes ecuaciones:

- 27)  $\frac{5}{3}x - 1 = 3$       28)  $\frac{2x}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
- 29)  $\frac{3x}{2} - 3x + 2 = 5$       30)  $2(x - 1) = 3(x + 2)$
- 31)  $3(2x + 3) = 5(x - 1)$       32)  $\frac{3}{2}(x + 1) = \frac{2}{5}(2x - 1)$
- 33)  $6x - 7 = 2x + 5$       34)  $9x + 8 - 5x = 2x + 10$
- 35)  $5x - 4 = 2(x - 2)$       36)  $4(2y + 5) = 3(5y - 2)$
- 37)  $6(2y + 3) - 3(y - 5) = 0$       38)  $\frac{3 + 5x}{5} = \frac{4 - x}{7}$
- 39)  $\frac{2x - 9}{4} = 2 + \frac{x}{12}$       40)  $\frac{x}{5} + 2 = 3 + x$

## Resolución de problemas que dan lugar a Ecuaciones Lineales en una incógnita, resolución por métodos diferentes.

**Para resolver cualquier problema, es necesario:**

- 1°. **Entender** en qué consiste (una buena ayuda se obtiene con dibujos o diagramas que representen la situación descrita por el enunciado del problema)
- 2°. Diseñar un **plan** y aplicar una estrategia para resolverlo.
- 3°. Encontrar la **respuesta y comprobarla.**

**Son expresiones usuales:**

**Datos:** la información que se conoce en un problema sobre sus condiciones y valores numéricos.

**Incógnita:** letra que se emplea en una expresión matemática para denotar una cantidad desconocida cuyo valor se trata de obtener.

**Proposición:** expresión de la que tenga sentido afirmar que es falsa o verdadera, pero no ambas cosas a la vez.

**Ecuación:** Es la relación de igualdad donde al menos hay una incógnita.

Una ecuación con una o más incógnitas puede ser verdadera o falsa dependiendo del valor de las incógnitas. Por ejemplo:

$x + 5 = 7$  es verdadera si la incógnita tiene valor 2 y falsa si su valor es diferente a dos

$y + 4 = x$  es verdadera si por ejemplo  $y = 2, x = 6$  etc., pero es falsa si  $y = 2, x = 5$  etc.

**Solución de una ecuación o sistema de ecuaciones:** son los valores de las incógnitas que hacen verdaderas las ecuaciones. A esos valores también se les llama **raíces, ceros** o **conjunto solución** de la ecuación.

Una igualdad con literales que expresa una ley científica, regla de cálculo o ley matemática, se conoce generalmente como fórmula, sin embargo, es simplemente una ecuación

Ciertos problemas pueden resolverse al expresarse algebraicamente.

Para resolver un problema que dan lugar a ecuaciones lineales hay que construir el modelo y resolverlo.

### Ejemplos

- 1) Con \$4801 una familia compró cama, estufa y librero. La cama costo \$200 más que el librero y \$600 menos que la estufa. ¿Cuánto pagaron por cada cosa?

Contesta sin ver el enunciado del problema:

¿Qué cosas compró la familia? \_\_\_\_\_

¿Cuántos pesos más que el librero costó la cama? \_\_\_\_\_

¿Cuántos pesos menos que la estufa costó la cama? \_\_\_\_\_

¿Qué se pregunta? \_\_\_\_\_

Antes de continuar verifica tus respuestas leyendo el enunciado del problema.

Precio de la cama =  $c$  (incógnita)

La cama costó 200 pesos más que el librero, es decir, el librero costó 200 menos que la cama:

Precio del librero =  $c - 200$

La cama costó 600 pesos menos que la estufa, es decir, la estufa costó 600 pesos más que la cama:

Precio de la estufa =  $c + 600$

Todo costó 4801 pesos, entonces la ecuación es:

$$\begin{array}{r}
 c + c - 200 + c + 600 = 4801 \\
 \begin{array}{c}
 | \qquad | \qquad | \qquad | \\
 \text{Precio de la cama} \quad \text{Precio del librero} \quad \text{Precio de la estufa}
 \end{array} \\
 c + c - 200 + c + 600 = 4801 \\
 3c + 400 = 4801 \\
 3c = 4401 \\
 c = 1467
 \end{array}$$

El precio del librero fue:  $1467 - 200 = 1267$  El de la estufa:  $1467 + 600 = 2067$

**Respuesta:** por la cama pagó 1467 pesos; por el librero 1267 y por la estufa 2067.

- 2) Un distribuidor reparte leche en tres centros comerciales. La tercera parte de la entrega en Aurrerá, en Sumesa deja  $\frac{5}{7}$  de lo que le queda y en la Tienda UNAM entrega 1800 litros. ¿Cuántos litros entrega?

Sin ver el enunciado del problema, contesta:

¿Cuántos centros comerciales atiende el distribuidor? \_\_\_\_\_

¿Cuántos litros del total entregó en “Aurrerá”? \_\_\_\_\_

¿Cuántos deja en “Sumesa”? \_\_\_\_\_

¿Y en la Tienda UNAM? \_\_\_\_\_

¿Qué se quiere saber? \_\_\_\_\_

Comprueba tus respuestas consultando el enunciado del problema.

Si  $s$  representa la cantidad total de litros que entrega el distribuidor, se tiene:

$$s = \frac{1}{3}s + \frac{5}{7}\left(s - \frac{1}{3}s\right) + 1800$$

$$s = \frac{1}{3}s + \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}s + 1800$$

$$s = \frac{1}{3}s + \frac{10}{21}s + 1800$$

$$s = \frac{17}{21}s + 1800$$

eliminando denominadores

$$21s = 17s + 37800$$

$$21s - 17s = 37800$$

$$\frac{4s}{4} = \frac{37800}{4}$$

$$s = 9450$$

**Respuesta:** el distribuidor entregó en total 9450 litros.

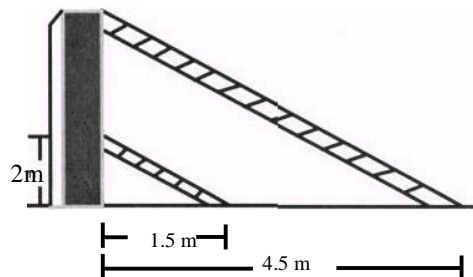
## Ejercicios

Elige la respuesta correcta de cada uno de los siguientes problemas:

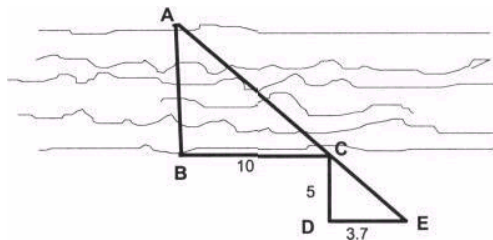
- 1) El largo de un terreno rectangular mide 5 metros más que su ancho. Si el perímetro es de 50 metros ¿El largo y ancho son respectivamente?
  - a) 18 y 13 metros
  - b) 15 y 10 metros
  - c) 20 y 15 metros
  - d) 45 y 50 metros
  
- 2) Un número es 4 veces más que el otro y la suma de los dos es 125, los números son:
  - a) 115 y 10
  - b) 110 y 15
  - c) 120 y 5
  - d) 100 y 25
  
- 3) Si el mayor de dos números se divide por el menor, el cociente es 2 y el residuo 4, y si 5 veces el menor se divide por el mayor el cociente es 2 y el residuo 17, los números son:
  - a) 25 y 50
  - b) 25 y 54
  - c) 50 y 30
  - d) 35 y 24

Resuelve los siguientes problemas

- 3) Del Distrito Federal a Guadalajara, por carretera sobre la ruta Toluca-Morelia-Salamanca, hay una distancia de 680 km/h. Si se viaja a una velocidad promedio de 80km/h ¿Cuánto tiempo durará el viaje del D. F., a Guadalajara?  
Ayuda: en una hora se recorren 80 km. en promedio.
- 5) La velocidad “c” de la luz en el vacío es de 300 000 000 m/s. ¿Cuántos Km. recorre en un segundo?
- 6) Un bote contiene 3 y medio galones de pintura. ¿Cuántos litros son? (1 galón equivale a 3.785 lt).
- 7) Una bomba casera para agua tiene una potencia de tres cuartos de HP (horse power o caballos de fuerza) ¿Cuántos wats (w) de potencia tiene si  $1 w = 0.00134 HP$ ?
- 8) Dos escaleras están recargadas en forma paralela sobre un muro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es la altura del muro?



- 9) Un hombre desea medir el ancho AB de un río utilizando un teodolito



Para hacerlo, camina sobre la orilla 10 m. en dirección perpendicular a AB y clava una estaca (punto C). De C camina perpendicularmente 5 m hasta D y después paralelamente al río hasta estar en línea recta con AC (punto E).

La distancia DE resulta ser de 3.7 m. ¿Cuánto mide el ancho AB del río?

- 10) En un mapa topográfico del Estado de Puebla, el Popocatepetl mide 10.9 cm. de alto. Si la escala es de 1 a 50 000 cm. ¿Cuál es la altura del Popocatepetl en metros?
- 11) De Tijuana a Cabo San Lucas, en la península de Baja California, hay una distancia de 1692 km. Si en un mapa la distancia entre las dos ciudades es de 8.46 cm. ¿A qué escala de dibujó el mapa?
- 12) El “Nevado de Toluca” tiene una altura de 4558 m. ¿Cuántos centímetros mediría en un mapa con escala de 1 a 40 000 cm.?
- 13) Un arquitecto debe incluir una terraza cuadrada de  $16 \text{ m}^2$  de superficie en el plano de una residencia. Si la escala de su diseño es de 1 a 100 cm. ¿Cuánto debe medir e área de la terraza en el plano? Ayuda: convierte las unidades lineales a unidades de superficie.
- 14) Escribe la relación entre las siguientes variables por medio de una igualdad matemática.

La potencia  $W$  generada por una batería es directamente proporcional a la corriente  $I$  que circula por un alambre.

La fuerza  $F$  que se aplica sobre un cuerpo es directamente proporcional a la aceleración  $a$ . La constante de proporcionalidad es la masa  $m$  del cuerpo.

## UNIDAD 4. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Al finalizar esta unidad podrás:

- Resolver problemas que llevan a plantear sistemas de ecuaciones lineales mediante una tabla de valores y gráficamente.
- Graficar una ecuación lineal en dos variables e identificarás la pendiente, la ordenada y la abscisa al origen.
- Graficar un sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  en un mismo plano interpretando geoméricamente la solución
- Identificarás los sistemas compatibles e incompatibles.
- Resolverás ecuaciones simultáneas por suma o resta, sustitución e igualación.

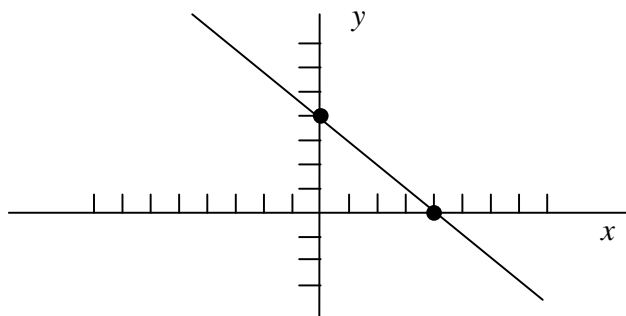
### Gráficas de ecuaciones lineales con dos variables.

La ecuación  $ax+by+c=0$  es de primer grado con dos variables, la cual graficaremos en un plano de coordenadas rectangulares como una recta, lo cual podremos hacer, determinando las coordenadas de los puntos que pertenecen a la recta.

**Ejemplo 1.** Para obtener la gráfica de  $x+y-4=0$  determinaremos los puntos donde la recta corta al eje de las abscisas y el punto donde corta al eje de la ordenadas para lo cual consideramos que:

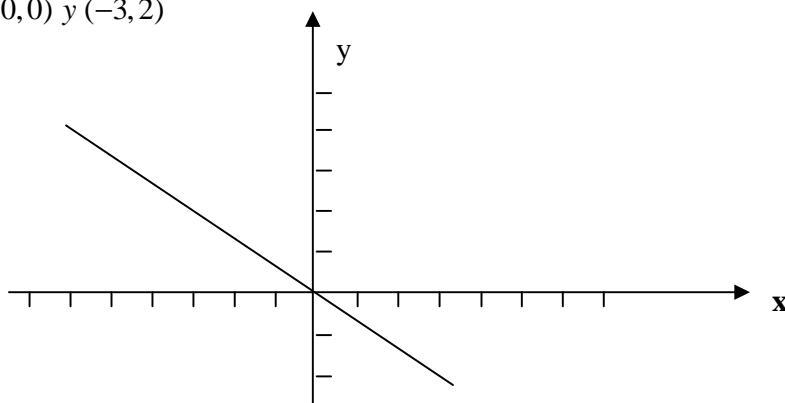
sobre el eje de las abscisas  $y=0$  por lo que  $x=4$  (abscisa al origen)

sobre el eje de las ordenadas  $x=0$  por lo que  $y=4$  (ordenada al origen)



**Ejemplo 2.** Para obtener la gráfica de  $2x+3y=0$  es necesario reconocer que la recta pasa por el origen del sistema coordenado, por lo que es necesario obtener cualquier otro punto dando un valor cualquiera a una de las variables y encontrar el valor de la otra sustituyéndolo en la ecuación, entonces:

Si  $x=-3$ , se tiene que  $y=2$ , por lo que la recta se grafica con los puntos de coordenadas  $(0,0)$  y  $(-3,2)$



### Ejercicios

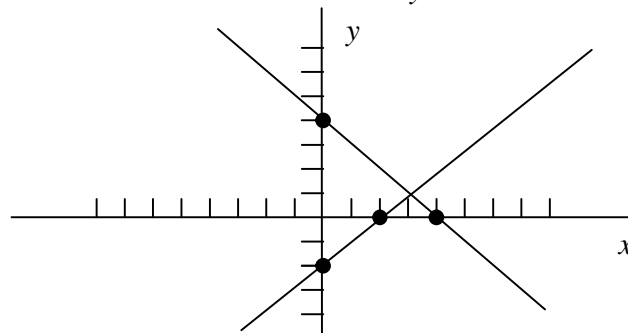
Grafica en el plano cartesiano cada una de las rectas que representan a las siguientes ecuaciones:

- 1)  $x - y - 2 = 0$
- 2)  $3x + y - 5 = 0$
- 3)  $x - 2y = 4$
- 4)  $4x = y + 3$
- 5)  $4x - y = 0$

### Gráficas de sistemas simultáneos de ecuaciones lineales.

Cuando tienes ecuaciones de primer grado con dos variables, puedes graficarlas e identificar como solución del sistema de ecuaciones al punto de intersección de las gráficas de las dos rectas, así:

**Ejemplo 1:** Si tienes el sistema de ecuaciones  $x + y - 4 = 0$   
 $x - y - 2 = 0$ , al graficarlas, obtienes:



Como las rectas se intersectan en el punto de coordenadas (3,1) la solución del sistema es:

$$x = 3$$

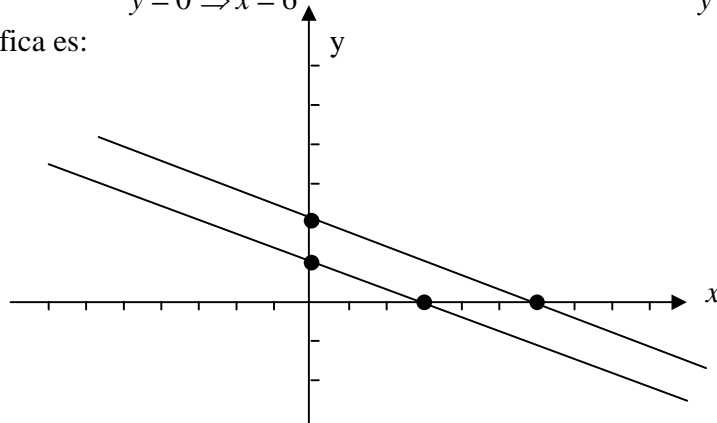
$$y = 1$$

y como es solución única el sistema recibe el nombre de **compatible**.

**Ejemplo 2.** Si tienes el sistema de ecuaciones  $x + 3y - 6 = 0$   
 $x + 3y - 3 = 0$ , para graficarlas, obtienes:

en la primera ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = 2$  y en la segunda ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = 1$   
si  $y = 0 \Rightarrow x = 6$  y si  $y = 0 \Rightarrow x = 3$

por lo que la gráfica es:





Como podrás observar las rectas que representan a las ecuaciones son paralelas, por lo que no existe solución para el sistema de ecuaciones el cual recibe el nombre de **incompatible**.

También puedes determinar si el sistema es incompatible al expresar como función a cada una de las ecuaciones, quedando:

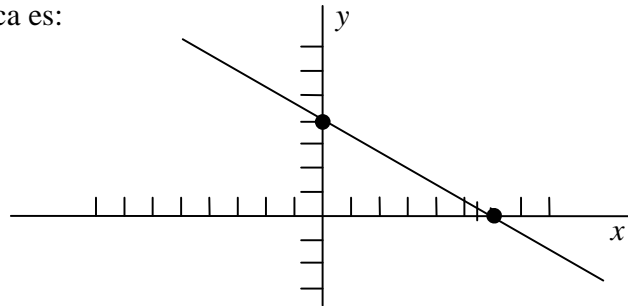
$$y = -\frac{1}{3}x + 2 \quad y \quad y = -\frac{1}{3}x + 1$$

funciones lineales donde el coeficiente de  $x$  es igual, por lo tanto la pendiente es la misma y las rectas son paralelas por tener la ordenada al origen diferente

**Ejemplo 3** Si tienes el sistema de ecuaciones:  $2x + 3y - 12 = 0$  y  $4x + 6y - 24 = 0$ , para graficarlas, obtienes:

en la primera ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = 4$  y en la segunda ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = 4$   
 $y = 0 \Rightarrow x = 6$   $y = 0 \Rightarrow x = 6$

por lo que la gráfica es:

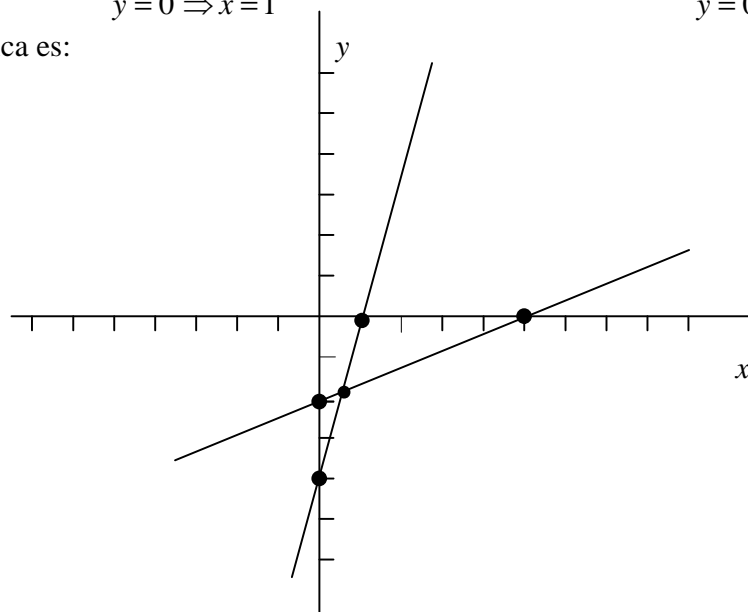


Como podrás observar las rectas que representan a las ecuaciones son la misma, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones el cual recibe el nombre de **equivalente**.

**Ejemplo 4.** Si tienes el sistema de ecuaciones:  $4x - y - 4 = 0$  y  $2x - 5y - 10 = 0$ , para graficarlas, obtienes:

en la primera ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = -4$  y en la segunda ecuación, si  $x = 0 \Rightarrow y = -2$   
 $y = 0 \Rightarrow x = 1$   $y = 0 \Rightarrow x = 5$

por lo que la gráfica es:



Como podrás observar las rectas que representan a las ecuaciones fueron fácilmente graficadas, sin embargo el punto de intersección no se puede identificar con exactitud por lo que es importante considerar que, por este camino de graficación no siempre se puede llegar a obtener la solución del sistema de ecuaciones.

Para resolver este problema, veremos enseguida los métodos algebraicos de solución de sistema simultáneos de ecuaciones que son Suma o Resta, Sustitución e Igualación

**Ejercicios** Encuentra graficando, en los casos que sea posible la solución de cada uno de los sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } y = -\frac{1}{3}x - 1 & \text{b) } 2y = 6 - x & \text{c) } x - 2y = 4 & \text{d) } 2x - 6 = -3y & \text{e) } 2x = -3y \\ 4x - 3y = 18 & 3x - 2y = 6 & x - 2y = -3 & 3y = 6 - 2x & 3y = 4x \end{array}$$

### Solución algebraica de sistemas de ecuaciones lineales.

Estos métodos para resolver de sistemas de ecuaciones, permiten llegar a la solución simplificando el sistema, lo cual se logra eliminando una de las incógnitas y así reducirlo a solo una ecuación con una incógnita.

**Solución por el Método de Sustitución.** Este método para obtener la solución de un sistema de ecuaciones permite la eliminación de una de las incógnitas sustituyendo su valor en función de la otra variable.

**Ejemplo.** Para el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} 5x - 4y = 12 \dots (1) \\ 3x - 2y = 8 \dots (2) \end{array}$$

Se despeja cualquiera de las incógnitas de cualquiera de las ecuaciones

$$\begin{array}{l} \text{Despejamos } x \text{ de (1)} \\ 5x - 4y = 12 \\ 5x = 12 + 4y \\ x = \frac{12 + 4y}{5} \dots (3) \end{array}$$

Se sustituye la incógnita despejada en la otra ecuación, en este caso en (2) y se simplifica la ecuación resultante, para obtener el valor de una de las incógnitas.

$$\begin{array}{l} \text{Sustituimos (3) en (2)} \\ 3 \cdot \frac{12 + 4y}{5} - 2y = 8 \\ \frac{36 + 12y}{5} - 2y = 8 \end{array}$$

*eliminando denominadores*

$$5\left(\frac{36+12y}{5}-2y\right)=8\cdot 5$$

$$36+12y-10y=40$$

$$12y-10y=40-36$$

$$2y=4$$

$$y=\frac{4}{2}=2$$

El valor encontrado de una de las incógnitas, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra.

Sustituimos  $y = 2$  en (1)

$$5x-4\cdot 2=12$$

$$5x-8=12$$

$$5x=12+8$$

$$x=\frac{20}{5}=4$$

Por lo tanto la solución del sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 5x-4y=12 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$ , es  $\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$

**Ejercicios:** Resuelve por el método de sustitución

1)  $\begin{cases} 7x+y=15 \\ 3x+y=7 \end{cases}$

2)  $\begin{cases} x+10y-24=0 \\ 3x-2y-8=0 \end{cases}$

**Solución por el Método de Suma o Resta.** Este método para obtener la solución de un sistema de ecuaciones permite la eliminación de una de las incógnitas mediante una suma o resta de las ecuaciones, pero es necesario que los coeficientes de la variable a eliminar sean iguales o simétricos en el sistema.

**Ejemplo.** Para el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 9x-8y=1 \cdots (1) \\ 6x+12y=5 \cdots (2) \end{cases}$

Primero se busca que los coeficientes de una de las incógnitas sean simétricos o iguales en el sistema.

Para que los coeficientes de  $x$  sean simétricos en el sistema, se multiplican la ecuación 1 por 2 y la ecuación 2 por  $-3$  y se suman algebraicamente las ecuaciones resultantes:

$$2(9x-8y)=1\cdot 2$$

$$-3(6x+12y)=5(-3)$$

quedando

$$\begin{array}{r} 18x - 16y = 2 \\ -18x - 36y = -15 \\ \hline 0 - 52y = -13 \\ y = \frac{-13}{-52} = \frac{1}{4} \end{array}$$

El valor encontrado de una de las incógnitas, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra.

Sustituimos  $y = \frac{1}{4}$  en (1)

$$9x - 8 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$9x - 2 = 1$$

$$9x = 1 + 2$$

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

La solución del sistema es  $x = \frac{1}{3}$   
 $y = \frac{1}{4}$

**Ejercicios.** Resuelve por el método de suma o resta:

1)  $4x + 5y + 7 = 0$   
 $4x - 5y + 9 = 0$

2)  $3x + 4y = 10$   
 $2x - 5y = -4$

**Solución por el Método de Igualación.** Este método para obtener la solución de un sistema de ecuaciones permite la eliminación de una de las incógnitas igualando sus valores en función de la otra.

**Ejemplo.** Para el sistema de ecuaciones:  $3x - 6y = 4 \dots (1)$   
 $2x + 9y = 7 \dots (2)$

Se despeja a la misma incógnita de ambas ecuaciones

Despejamos a  $x$  de 1 y de 2

$$\begin{array}{r} 3x - 6y = 4 \\ 3x = 6y + 4 \\ x = \frac{6y + 4}{3} \dots (3) \end{array} \quad \begin{array}{r} 2x + 9y = 7 \\ 2x = -9y + 7 \\ x = \frac{-9y + 7}{2} \dots (4) \end{array}$$

Se igualan los valores despejados y se simplifica la ecuación resultante

Se igualan (3) con (4)

$$\frac{6y+4}{3} = \frac{-9y+7}{2}$$

*multiplicando por 6*

$$6 \cdot \frac{6y+4}{3} = \frac{-9y+7}{2} \cdot 6$$

$$2(6y+4) = 3(-9y+7)$$

$$12y+8 = -27y+21$$

$$12y+27y = 21-8$$

$$39y = 13$$

$$y = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$$

El valor encontrado de una de las incógnitas, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones originales para obtener el valor de la otra.

Sustituyendo  $y = \frac{1}{3}$  en (1)

$$3x - 6 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

$$3x - 2 = 4$$

$$3x = 4 + 2$$

$$x = \frac{6}{3} = 2$$

$$x = 2$$

La solución del sistema es  $y = \frac{1}{3}$

**Ejercicios:** Resuelve por el método de igualación

1)  $2x - 3y = 9$

$3x + 2y = 7$

2)  $7x + y - 4 = 0$

$4x - 2y - 1 = 0$

Contesta correctamente las siguientes preguntas

3) El sistema de ecuaciones  $\begin{cases} -3x + 2y = 7 \\ x + y = -3 \end{cases}$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

4) El sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 6x - 8y = 6 \end{cases}$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

5) El sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

6) El sistema de ecuaciones  $\begin{cases} 3x - 5y = 9 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

7) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 9y = 10 \end{cases}$$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

8) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} y = -\frac{5x}{2} + 8 \\ y = -\frac{4x}{3} + \frac{10}{3} \end{cases}$$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

9) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

10) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

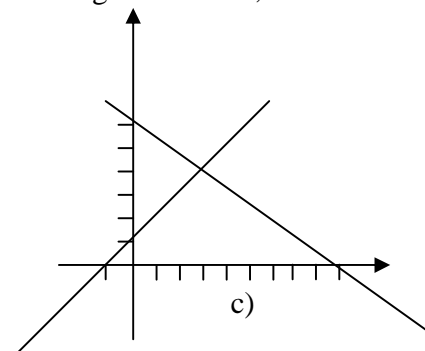
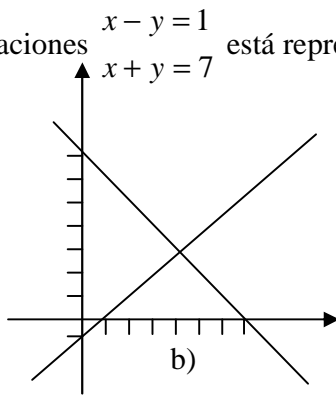
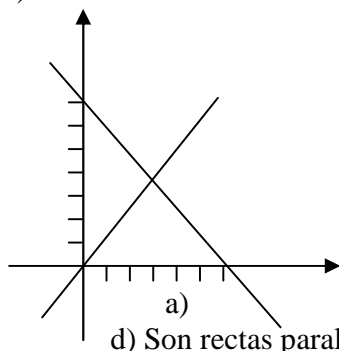
11) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x = 2y + 6 \end{cases}$$

- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

12) El sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + 9y = 0 \end{cases}$$

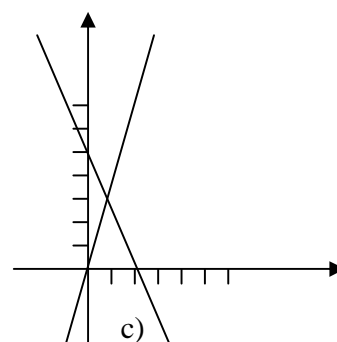
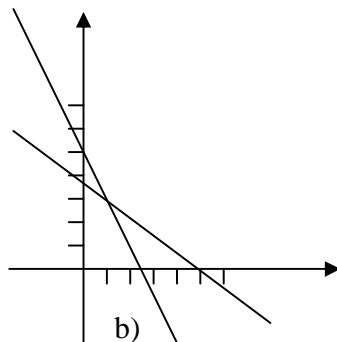
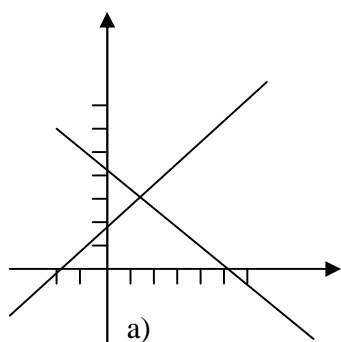
- a) No tiene solución
- b) La solución es única
- c) Tiene infinitas soluciones
- d) La solución es doble

13) La solución del sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$$
 está representada gráficamente, en:



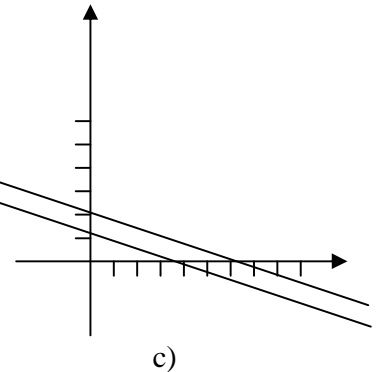
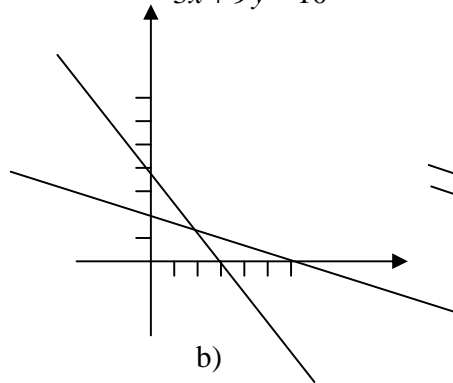
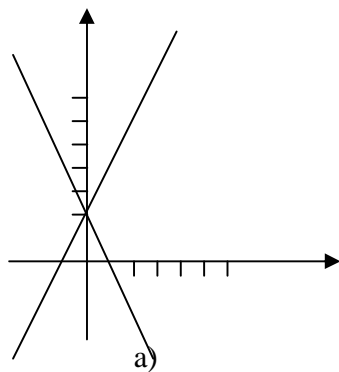
d) Son rectas paralelas

14) La solución del sistema de ecuaciones 
$$\begin{cases} 3x + 4y = 15 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$
 está representada gráficamente



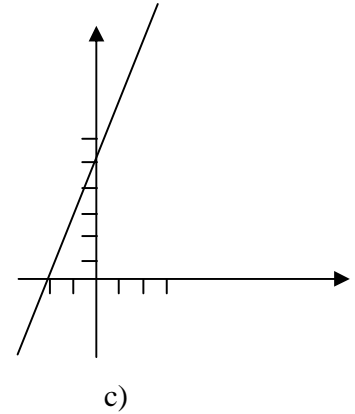
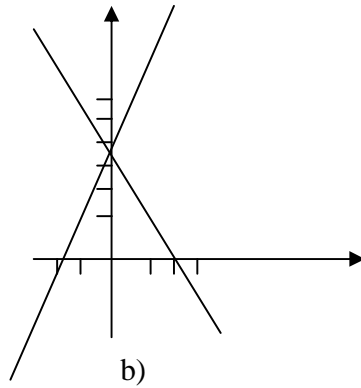
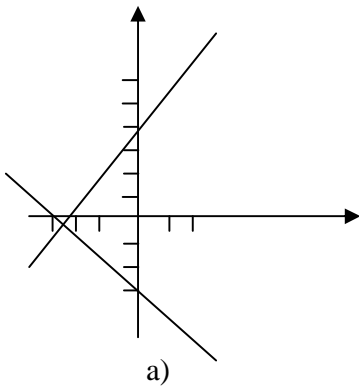
d). Las rectas no se cortan

15) La solución del sistema de ecuaciones  $x + 3y = 6$   
 $3x + 9y = 10$  está representada, en:



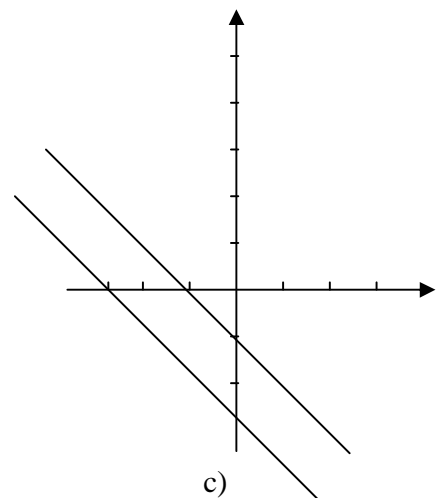
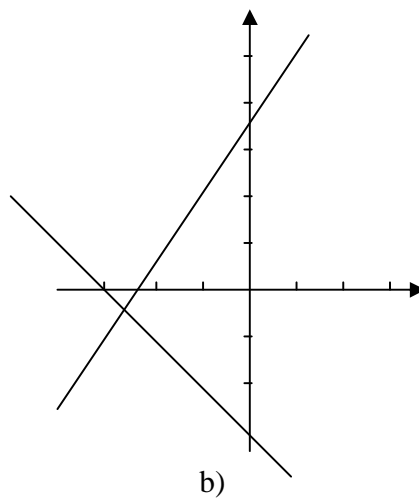
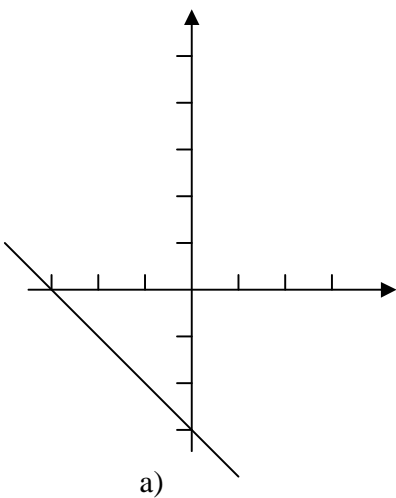
d). No se pueden graficar las ecuaciones

16) La solución del sistema de ecuaciones  $5x - 2y + 10 = 0$   
 $10x - 4y = -20$  está representada en :



d) Las rectas son paralelas

17) La solución del sistema de ecuaciones  $-3x + 2y = 7$   
 $x + y = -3$  está representada, en:



d) Las ecuaciones no se pueden graficar.

Resuelve por el método que desees cada uno de los siguientes sistemas y selecciona la solución correcta.

$$18) \begin{cases} x + 3y = 6 \\ 5x - 2y = 13 \end{cases}$$

- a)  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \end{cases}$

$$19) \begin{cases} 5x + 7y = -1 \\ -3x + 4y = -24 \end{cases}$$

- a)  $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$

$$20) \begin{cases} 3x + 4y = 8 \\ 8x - 9y = -77 \end{cases}$$

- a)  $\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -4 \\ y = 5 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = -4 \\ y = -5 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}$

$$21) \begin{cases} x - 5y = 8 \\ -7x + 8y = 25 \end{cases}$$

- a)  $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = 7 \\ y = -3 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = -7 \\ y = -3 \end{cases}$

$$22) \begin{cases} 15x + 11y = 32 \\ -9x + 7y = 8 \end{cases}$$

- a)  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 2 \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x = -2 \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$     c)  $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$     d)  $\begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$     e)  $\begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = -2 \end{cases}$



### Problemas que dan lugar a sistemas de ecuaciones lineales.

A partir del siguiente problema, trata de identificar las relaciones que existen entre los datos que se te proporcionan y los resultados que debes obtener.

**Ejemplo.** En una papelería un niño compró 5 plumas y 4 lápices pagando por ellos \$ 30.00, otro niño compró 2 plumas y 6 lápices pagando \$ 23.00. ¿Cuál fue el costo de cada pluma y cada lápiz?

Iniciamos la solución identificando las variables que vamos a utilizar y describiendo su significado en el modelo matemático, así:

$x$  representa el costo de cada pluma  
 $y$  representa el costo de cada lápiz

Construimos el modelo matemático que representa las relaciones descritas en el enunciado, quedando:

$$5x + 4y = 30$$

$$2x + 6y = 23$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones, utilizando cualquier método, que en este caso será suma o resta, para lo cual multiplicamos a la primera ecuación por 3 y a la segunda por  $-2$  y sumamos las ecuaciones resultantes, obteniéndose:

$$3(5x + 4y) = 30 \times 3$$

$$-2(2x + 6y) = 23(-2)$$

$$15x + 12y = 90$$

$$\underline{-4x - 12y = -46}$$

$$11x + 0 = 44$$

$$11x = 44$$

$$x = \frac{44}{11} = 4$$

Si ahora sustituimos el valor de  $x = 4$  en la segunda ecuación original, tenemos:

$$2 \times 4 + 6y = 23$$

$$8 + 6y = 23$$

$$6y = 23 - 8$$

$$y = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Ahora sabemos que el costo de cada pluma fue de \$ 4.00 y de cada lápiz \$2.50

### Ejercicio

Resuelve los siguientes problemas cuyo modelo es un sistema de ecuaciones lineales.

1) Un almacenista tiene dulces de \$ 45.00 el kilogramo y otros de \$ 70.00 el kilogramo, si quiere hacer una mezcla de 120 kilogramos cuyo costo sea de \$ 55.00 el kilogramo. ¿Cuántos kilogramos de cada clase de dulces tendrá que mezclar?

2) La suma de los dígitos de un número de 2 cifras es 13. Si las cifras del número se invierten, el número resultante es 9 unidades menor que el número original. ¿Cuál es el número original?

3) El gerente de un teatro sabe que vendió 450 boletos para una función. Si cada boleto de adulto costó \$ 150.00 y cada boleto de niño costó \$ 40.00 y en total recaudó \$ 45,500.00 ¿cuál fue el número de boletos de adulto y cual el de niños que vendió?

4) Si el menor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo mide la cuarta parte del otro ángulo agudo ¿Cuál es la medida de cada uno de ellos?

5) Al final de las ventas del día un comerciante encontró que tenía \$211.00 en monedas de \$2.00 y \$5.00, si en total fueron 59 monedas ¿Cuántas tiene de cada denominación?

## **UNIDAD 5. ECUACIONES CUADRÁTICAS**

**Al finalizar esta unidad:**

- Utilizarás los métodos de factorización, completar el trinomio cuadrado perfecto y fórmula general para resolver ecuaciones cuadráticas con una variable.
- Determinarás cuando una ecuación cuadrática no tiene solución real.
- Analizarás las condiciones y relaciones que se establecen en un enunciado verbal de un problema que por su naturaleza da lugar a ecuaciones cuadráticas.
- Resolverás problemas que involucren en su solución ecuaciones de segundo grado con una variable.

### **Solución de ecuaciones cuadráticas o de segundo grado.**

Para resolver las ecuaciones cuadrática o de segundo grado con una variable, tendrás primero que recordar que tienen la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales cualesquiera, tales que  $a \neq 0$ .

Para resolver una ecuación de segundo grado es necesario simplificarla y el primer paso es presentar el modelo cuadrático como modelo de primer grado, lo que nos lleva a la necesidad de factorizar.

### **Solución por factorización**

Para resolver factorizando una ecuación cuadrática debes recordar que la factorización depende de la estructura algebraica. Así:

**Ejemplo 1.** Si tienes la ecuación de segundo grado  $x^2 - 3x + 2 = 0$

Ecuación cuya estructura corresponde a un trinomio cuadrático que resulta de la multiplicación de dos binomios con un término común y que para encontrarlos se buscan dos números cuyo producto sea 2 que es el término independiente y su suma sea  $-3$  que es el término independiente.

Tales números son  $-1$  y  $-2$ , por lo que la ecuación queda expresada como:

$$(x-1)(x-2)=0$$

Al factorizarla, la ecuación expresa la multiplicación de dos factores cuyo producto es cero, proposición que nos lleva a afirmar que solo se cumple si cualquiera o los dos factores son iguales con cero, generando las ecuaciones

$$x-1=0 \quad \text{ó} \quad x-2=0$$

que al despejar a la variable de las ecuaciones generadas nos lleva a obtener las raíces de la ecuación cuadrática, es decir: si  $x-1=0 \Rightarrow x=1$  y si  $x-2=0 \Rightarrow x=2$

por lo que se tiene que 1 y 2 son las raíces de la ecuación  $x^2-3x+2=0$ .

**Ejemplo 2.** Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$25x^2-16=0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de una diferencia de cuadrados la cual se obtiene de la multiplicación de dos binomios conjugados y que para encontrarlos se extrae la raíz cuadrada de  $25x^2$  y la raíz cuadrada de 16.

Tales raíces cuadradas son  $5x$  y  $4$ , por lo que la ecuación queda factorizada como:

$$(5x-4)(5x+4)=0$$

que se cumple si  $5x-4=0$  ó  $5x+4=0$  y que al despejar a la variable, se obtiene:

$$x=\frac{4}{5} \quad x=-\frac{4}{5}$$

por lo que se tiene que  $\frac{4}{5}$  y  $-\frac{4}{5}$  son las raíces de la ecuación  $25x^2-16=0$ .

**Ejemplo 3.** Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$4x^2-12x+9=0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de un trinomio cuadrado perfecto el cual resulta de la multiplicación de un binomio por si mismo o al cuadrado que para encontrarlo se extrae la raíz cuadrada de  $4x^2$  y la raíz cuadrada de 9.

Tales raíces cuadradas son  $2x$  y  $3$  y como el signo del coeficiente del término lineal es negativo, por lo que la ecuación queda factorizada como:

$$(2x-3)(2x-3)=0$$

que se cumple si  $2x-3=0$  ó  $2x-3=0$  y que al despejar la variable se obtiene:

$$x = \frac{3}{2} \qquad x = \frac{3}{2}$$

como te podrás dar cuenta las dos raíces son iguales por lo que podemos afirmar que  $\frac{3}{2}$  es la raíz de multiplicidad 2 de la ecuación  $4x^2 - 12x + 9 = 0$ .

**Ejemplo 4.** Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$10x^2 + 4x = 0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de un polinomio con un término común y que se factoriza determinando el monomio factor común  $2x$  y dividiendo cada término del polinomio  $10x^2 + 4x$  entre él para obtener que el otro factor es  $5x+2$ , quedando la ecuación factorizada como:

$$2x(5x+2) = 0$$

que se cumple si  $x=0$  ó  $5x+2=0$  y que al despejar la variable, se obtiene:

$$x = 0 \qquad 5x + 2 = 0$$
$$x = -\frac{2}{5}$$

por lo que se tiene que  $0$  y  $-\frac{2}{5}$  son las raíces de la ecuación  $10x^2 + 4x = 0$ .

**Ejemplo 5.** Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$3x^2 + 2x - 21 = 0$$

Ecuación cuya estructura corresponde a la de un trinomio de segundo grado, el cual resulta de la multiplicación de dos binomios y que para encontrarlos se puede multiplicar al coeficiente del término cuadrático  $3$  por el término independiente  $-21$  cuyo producto es  $-63$  y se buscan dos números cuyo producto sea  $-63$  y su suma sea  $2$  que es el coeficiente del término lineal.

Tales números son  $-7$  y  $9$  y con ellos se expresa al término lineal utilizando estos números como coeficientes de dos términos lineales que generan el polinomio de cuatro términos:

$$3x^2 - 7x + 9x - 21$$

este último se factoriza por agrupación, quedando la ecuación factorizada como sigue:

$$x(3x-7)+3(3x-7)=0$$

$$(3x-7)(x+3)=0$$

que se cumple si  $3x-7=0$  ó  $x+3=0$  y que al despejar la variable, se obtiene:

$$x = \frac{7}{3} \qquad x = -3$$

por lo que se tiene que  $\frac{7}{3}$  y  $-3$  son las raíces de la ecuación  $3x^2 + 2x - 21 = 0$ .

### Ejercicios

Contesta cada una de las siguientes preguntas

1) ¿Qué es una ecuación cuadrática?

2) ¿Cuándo se considera una ecuación cuadrática completa?

3) ¿Cuándo se considera incompleta?

4) Aparte de factorizar para resolver ecuaciones cuadráticas, ¿Qué otras formas para resolverlas conoces?

5) ¿Cuál es el número de raíces que tiene una ecuación cuadrática?

Elige la opción que corresponde a la de la respuesta correcta:

6) La factorización de  $y^2 - 6y + 9 = 0$  es:

a)  $(y-3)(y+3) = 0$

b)  $(y-9)(y+1) = 0$

c)  $(y-1)(y+9) = 0$

d)  $(y-3)(y-3) = 0$

7) La factorización de  $x^2 + 14x + 49 = 0$  es:

a)  $(x+7)^2 = 0$

b)  $(x+7)(x-7) = 0$

c)  $(x+2)(x+7) = 0$

d)  $(x-7)^2 = 0$

8) La factorización de  $72y + 16 + 81y^2 = 0$  es:

a)  $(4 + 9y)^2 = 0$

b)  $(4 + 9y)(4 - 9y) = 0$

c)  $(4 + y)(4 + 72y) = 0$

d)  $(4 - 9y)^2 = 0$

9) La factorización de  $100x^2 - 20x + 1 = 0$  es:

a)  $(10x + 1)(10x + 1) = 0$

b)  $(10x + 20)(10x - 1) = 0$

c)  $(10x - 1)(10x - 20) = 0$

d)  $(10x - 1)(10x - 1) = 0$

10) La factorización de  $x^2 - 10x + 25 = 0$  es:

a)  $(x - 5)(x + 5) = 0$

b)  $(x + 5)(x - 10) = 0$

c)  $(x - 5)(x - 5) = 0$

d)  $(x + 10)(x - 5) = 0$

11) La factorización de  $3x^2 - 5x + 2 = 0$  es:

a)  $(x + 1)(3x + 2) = 0$

b)  $(3x - 2)(x - 1) = 0$

c)  $(x + 1)(3x - 2) = 0$

d)  $(3x + 1)(x - 2) = 0$

12) La factorización de  $x^2 + 11x + 24 = 0$  es:

a)  $(x + 4)(x + 6) = 0$

b)  $(x + 3)(x + 8) = 0$

c)  $(x + 2)(x + 12) = 0$

d)  $(x + 11)(x + 24) = 0$

13) Las raíces de la ecuación  $x^2 - 11x - 26 = 0$ , son:

- a)  $-11$  y  $-26$
- b)  $11$  y  $26$
- c)  $13$  y  $-2$
- d)  $-13$  y  $2$

14) Las raíces de la ecuación  $x^2 - 9x = 0$ , son:

- a)  $-1$  y  $-9$
- b)  $0$  y  $9$
- c)  $3$  y  $-3$
- d)  $9$  y  $1$

15) Las raíces de la ecuación  $9x^2 - 49 = 0$ , son:

- a)  $7$  y  $-7$
- b)  $\frac{7}{3}$  y  $-\frac{7}{3}$
- c)  $3$  y  $-3$
- d)  $\frac{49}{9}$  y  $-\frac{49}{9}$

16) Las raíces de la ecuación  $4a^2 + 3a - 10 = 0$ , son:

- a)  $\frac{5}{4}$  y  $-2$
- b)  $2$  y  $-\frac{5}{4}$
- c)  $3$  y  $-10$
- d)  $10$  y  $-3$

17) Las raíces de la ecuación  $9y^2 + 6y + 1 = 0$ , son:

- a)  $9$  y  $6$
- b)  $6$  y  $1$
- c)  $\frac{1}{3}$  de multiplicidad  $2$
- d)  $-\frac{1}{3}$  de multiplicidad  $2$

18) Las raíces de la ecuación  $4m^2 - 4m + 1 = 0$ , son:

a) 4 y -1

b) -4 y 1

c)  $\frac{1}{2}$  de multiplicidad 2

d)  $-\frac{1}{2}$  de multiplicidad 2

19) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 9 y 7, la ecuación factorizada es:

a)  $(x+7)(x-9) = 0$

b)  $(x-7)(x-9) = 0$

c)  $(x+9)(x-7) = 0$

d)  $(x+7)(x+9) = 0$

20) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son  $-2$  y  $\frac{3}{2}$ , la ecuación factorizada es:

a)  $(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$

b)  $(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right) = 0$

c)  $\left(x-\frac{3}{2}\right)(x-2) = 0$

d)  $\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2) = 0$

21) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son 0 y  $-4$ , la ecuación factorizada es:

a)  $(x+4)x = 0$

b)  $x(x-4) = 0$

c)  $(x-0)(-4) = 0$

d)  $4(x-0) = 0$

22) Si las raíces de una ecuación de segundo grado son 3 y 4, la ecuación es:

a)  $x^2 + 3x + 4 = 0$

b)  $x^2 - 7x + 12 = 0$

c)  $x^2 - 4x + 3 = 0$

d)  $x^2 + 7x + 12 = 0$



23) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son  $-1$  y  $3$ , la ecuación es:

a)  $x^2 - 2x - 3 = 0$

b)  $x^2 + 3x - 1 = 0$

c)  $x^2 - x + 3 = 0$

d)  $x^2 + 2x - 3 = 0$

24) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son  $-5$  y  $-7$ , la ecuación es:

a)  $x^2 - 5x + 7 = 0$

b)  $x^2 + 5x - 7 = 0$

c)  $x^2 + 12x + 35 = 0$

d)  $x^2 - 12x + 35 = 0$

25) Si las raíces de la ecuación de segundo grado son  $1$  y  $\frac{1}{2}$ , la ecuación es:

a)  $x^2 + \frac{x}{2} + 1 = 0$

b)  $x^2 - x + 2 = 0$

c)  $2x^2 - 3x + 1 = 0$

d)  $2x^2 + 3x + 1 = 0$

### Solución completando el trinomio cuadrado perfecto

En ocasiones la ecuación de segundo grado no es fácil factorizarla por alguno de los procedimientos mostrados en los ejemplos anteriores, por lo que hay que buscar otra forma de factorizarla, lo cual se logra completando un trinomio cuadrado perfecto que es el producto de un binomio por sí mismo, es decir, de elevar al cuadrado un binomio.

**Ejemplo 6:** Si tienes una ecuación de segundo grado como:

$$6x^2 - x - 15 = 0$$

primero divides toda la ecuación entre el coeficiente del término cuadrático, que en este caso es 6, quedando:

$$x^2 - \frac{1}{6}x - \frac{5}{2} = 0$$

enseguida completas el trinomio cuadrado perfecto para el binomio  $x^2 - \frac{1}{6}x$  sacando mitad

al coeficiente del término lineal, que en este caso es  $-\frac{1}{6}$ , lo elevas al cuadrado y lo sumas y restas para obtener:

$$x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144} - \frac{1}{144} - \frac{5}{2} = 0$$

ahora ya tienes la certeza de que  $x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{144}$  es un trinomio cuadrado perfecto, el cual puedes factorizar como  $\left(x - \frac{1}{12}\right)^2$  y al reducir los términos independientes  $-\frac{1}{144} - \frac{5}{2}$  como  $-\frac{361}{144}$ , se tiene que la ecuación de segundo grado queda expresada como:

$$\left(x - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{361}{144} = 0$$

que es una diferencia de cuadrados y que al factorizarla deja a la ecuación expresada como:

$$\left(x - \frac{1}{12} - \frac{19}{12}\right)\left(x - \frac{1}{12} + \frac{19}{12}\right) = 0$$

que se cumple si  $x - \frac{1}{12} - \frac{19}{12} = 0$  ó  $x - \frac{1}{12} + \frac{19}{12} = 0$  y que al despejar la variable se obtiene:

$$\begin{array}{ll} x - \frac{5}{3} = 0 & x + \frac{3}{2} = 0 \\ x = \frac{5}{3} & x = -\frac{3}{2} \end{array}$$

por lo que se tiene que  $\frac{5}{3}$  y  $-\frac{3}{2}$  son las raíces de la ecuación  $6x^2 - x - 15 = 0$ .

### Ejercicios:

1) Al resolver la ecuación  $x^2 - 10x + 9 = 0$  completando el trinomio cuadrado perfecto, el paso correcto al completarlo es:

- a)  $x^2 - 10x + 9 - 9 = 0$
- b)  $x^2 - 10x + 25 - 25 = 0$
- c)  $x^2 - 10x + 20 - 20 + 9 = 0$
- d)  $x^2 - 10x + 25 - 25 + 9 = 0$

2) Al resolver la ecuación  $x^2 + 3x - 10 = 0$  completando el trinomio cuadrado perfecto, el paso correcto al completarlo es:

a)  $x^2 + 3x + 9 + 9 - 10 = 0$

b)  $x^2 + 3x + 9 - 9 - 10 = 0$

c)  $x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 10 = 0$

d)  $x^2 + 3x + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} - 10 = 0$

Resuelve las siguientes ecuaciones, completando el trinomio cuadrado perfecto:

3)  $x^2 + 2x - 15 = 0$

4)  $x^2 - 4x + 1 = 0$

5)  $x^2 - x - 12 = 0$

5)  $3x^2 - 2x - 1 = 0$

### Solución utilizando la fórmula general

Como sabes, existe una fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado, sin embargo, debes saber que esta fórmula proviene de resolver completando el trinomio cuadrado perfecto y factorizando la ecuación completa general  $ax^2 + bx + c = 0$ , proceso que puedes consultar en algún texto de álgebra, consultar con algún profesor o hacerlo siguiendo los pasos descritos en el ejemplo anterior.

Así, para la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$ , se tiene:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

donde fácilmente puedes observar que:  $a$  es el coeficiente del término cuadrático,  $b$  es el coeficiente del término lineal y  $c$  es el término independiente.

**Ejemplo 7.** Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 1:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, primero identificas los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 1$$

$$b = -3$$

$$c = 2$$

enseguida sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{3+1}{2} = 2 \quad x = \frac{3-1}{2} = 1$$

por lo que se tiene que 1 y 2 son las raíces de la ecuación  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , valores que coinciden con los valores obtenidos en el ejemplo 1, resuelto por factorización.

**Ejemplo 8.** Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 2:

$$25x^2 - 16 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 25$$

$$b = 0$$

$$c = -16$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \times 25(-16)}}{2 \times 25}$$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0+1600}}{50} = \frac{\pm \sqrt{1600}}{50} = \frac{\pm 40}{50}$$

$$x = \frac{40}{50} = \frac{4}{5} \quad x = \frac{-40}{50} = -\frac{4}{5}$$

por lo que se tiene que  $\frac{4}{5}$  y  $-\frac{4}{5}$  son las raíces de la ecuación  $25x^2 - 16 = 0$ , valores que coinciden con los obtenidos en el ejemplo 2, resuelto por factorización.

**Ejemplo 9.** Si tienes la ecuación cuadrática del ejemplo 4:

$$10x^2 + 4x = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 10$$

$$b = 4$$

$$c = 0$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 10 \times 0}}{2 \times 10}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 0}}{20} = \frac{-4 \pm \sqrt{16}}{20} = \frac{-4 \pm 4}{20}$$

$$x = \frac{-4 + 4}{20} = \frac{0}{20} = 0 \quad x = \frac{-4 - 4}{20} = \frac{-8}{20} = -\frac{2}{5}$$

por lo que se tiene que  $0$  y  $-\frac{2}{5}$  son las raíces de la ecuación  $10x^2 + 4x = 0$  valores que coinciden con los obtenidos en el ejemplo 4, resuelto por factorización.

**Ejemplo 10.** Si tienes la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 4x - 7 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$c = -7$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$x = \frac{4 + \sqrt{44}}{2} = 2 + \sqrt{11} \quad x = \frac{4 - \sqrt{44}}{2} = 2 - \sqrt{11}$$

como te darás cuenta, nos encontramos con la raíz cuadrada no exacta, la cual no tendrá necesidad de extraer ya que al ser un número irracional no tendrás un resultado correcto si la aproximas por lo que se tiene que  $2 + \sqrt{11}$  y  $2 - \sqrt{11}$  son las raíces de la ecuación  $x^2 - 4x - 7 = 0$ .

**Ejemplo 11.** Si tienes la ecuación cuadrática:

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

si la resuelves aplicando la fórmula general, identificas los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la ecuación igualada con cero, que son en este caso:

$$a = 1$$

$$b = -2$$

$$c = 2$$

sustituyes en la fórmula general los valores identificados, quedando:

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

como te darás cuenta, nos encontramos con la raíz cuadrada de un número negativo la cual no es un número real sino un número imaginario, teniendo entonces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$x = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad x = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

por lo que se tiene que las raíces de la ecuación no son reales sino complejas, es decir,  $1+i$  y  $1-i$  son las raíces de la ecuación  $x^2 - 2x + 2 = 0$ .

### Ejercicios:

- 1) Al resolver la ecuación general  $ax^2 + bx + c = 0$ , si  $b^2 - 4ac > 0$ , en la fórmula general.
  - a) Las raíces son reales y simétricas.
  - b) Las raíces son imaginarias y simétricas
  - c) Las raíces son reales y diferentes.
  - d) Las raíces son imaginarias y diferentes.
- 2) Al resolver la ecuación general  $ax^2 + bx + c = 0$ , si  $b^2 - 4ac = 0$ .
  - a) Las raíces son reales e iguales.
  - b) Las raíces son reales y diferentes.
  - c) Las raíces son reales y simétricas.
  - d) Las raíces son imaginarias e iguales.
- 3) Al resolver la ecuación general  $ax^2 + bx + c = 0$ , si  $b^2 - 4ac < 0$ 
  - a) Las raíces son complejas
  - b) Las raíces son reales.
  - c) Las raíces son imaginarias e iguales.
  - d) Las raíces son enteras.

Resuelve utilizando la fórmula general, las ecuaciones:

4)  $x^2 + 3x - 10 = 0$

5)  $x^2 + 6x + 6 = 0$

6)  $2x^2 - 7x - 15 = 0$

7)  $3x^2 + 6x - 5 = 0$

8)  $x^2 + 4x + 5 = 0$

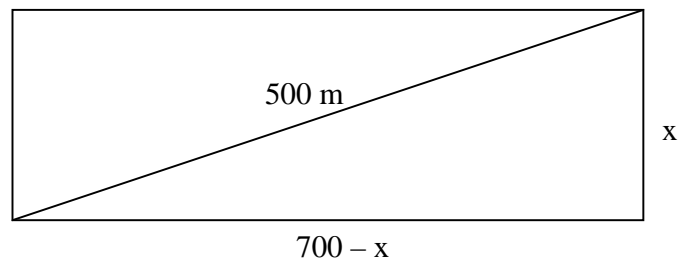
### Problemas que dan lugar a ecuaciones cuadráticas

A partir del siguiente problema, trata de identificar las relaciones que existen entre los datos que se te proporcionan y los resultados que debes obtener.

**Ejemplo.** Se construye una calle que cruza en diagonal sobre un terreno rectangular, de tal manera que éste queda dividido en dos partes iguales en forma de triángulo.

Si la longitud de la calle es de 500 m., ¿cuáles son las longitudes del ancho y largo del terreno, si ambas suman 700m?

Iniciamos la solución usando una figura que simula al problema y donde podrás observar que la calle divide al terreno en dos triángulos rectángulos congruentes donde  $x$  simboliza el ancho y  $700 - x$  al largo.



Aplicando el Teorema de Pitágoras. Tenemos:

$$x^2 + (700 - x)^2 = 500^2$$

$$x^2 + 490000 - 1400x + x^2 - 250000 = 0$$

$$2x^2 - 1400x + 240000 = 0$$

*Simplificando:*

$$x^2 - 700x + 120000 = 0$$

Este modelo corresponde a una ecuación de segundo grado, la cual se resuelve fácilmente mediante factorización para lo cual buscamos dos números que multiplicados dan 120000 y sumados  $-700$ , quedando:

$$(x - 300)(x - 400) = 0$$

relación que se cumple con:

$$x - 300 = 0 \Rightarrow x = 300$$

$$\text{y con } x - 400 = 0 \Rightarrow x = 400$$

Por lo tanto las medidas de los lados del terreno son: 300 y 400 metros.

### Ejemplo.

Completa lo que se señala:

Raúl Márquez quiere instalar un telón rectangular en un teatro. Si sabe que necesita  $252 \text{ m}^2$  de tela y que la altura del escenario es 10 metros menos que el doble de su ancho ¿Cuáles son las medidas de la tela que necesita?

Incógnitas y datos:

Altura:  $2x - 10$

Ancho:  $x$

Ecuación:

$$(2x - 10)x = 252$$

$$2x^2 - 10x = 252$$

$$2x^2 - 10x - 252 = 0$$

resuelve la ecuación para lo cual te recomendamos que dividas a la ecuación entre 2 que es el coeficiente del término cuadrático  $x^2$ . Después de hacerlo la ecuación queda:

---

Resuélvela y da la solución del problema

### Resuelve los siguientes problemas cuyo modelo es una ecuación cuadrática.

- 1) ¿Cuáles son los dos números enteros cuya suma es 23 y la suma de sus cuadrados es 277?
- 2) Si el área de un terrero de forma rectangular es de  $105 \text{ m}^2$  ¿Cuál es su perímetro si su largo excede 1 m al doble de su ancho?
- 3) Un auditorio tiene 600 asientos. El número de asientos de cada fila es menor en 10 unidades que el doble del número de filas ¿Cuál es el número de asientos en cada fila?
- 4) ¿Cuáles son los factores negativos de 189 tales que su diferencia es 12?
- 5) El perímetro de un terreno rectangular es de 34 m y su área de  $60 \text{ m}^2$ . ¿Cuáles son sus dimensiones?



## RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

### Página 7 (números enteros)

- 1) b
- 2) c
- 3) d
- 4) a
- 5) d
- 6) b
- 7) a) V  
b) V  
c) F  
d) F
- 8) b
- 9) c
- 10) b

### Página 11 (operaciones con números enteros)

- 1) Recta donde se pueden localizar todos los números reales.
- 2) Son aquellos números que carecen de la parte decimal y son los positivos, negativos y el cero.
- 3) Para muchas cosas como son:  
Las edades, contar dinero, graficar una figura, contar los días de c/mes, contar los años, las calificaciones, etc.
- 4)  $-1, -2, -3, -4, \dots$
- 5) El  $-1$ .
- 6)  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- 7) El  $1$ .
- 8) Se llama **Origen** y no tiene signo.
- 9) A la derecha del origen.
- 10) Si, el cero en le centro, a la derecha los positivos, a la izquierda los negativos no importa la escala que se utilice pero una vez ubicado el primero la misma escala será para todos.
- 11) Es la distancia del origen al punto que representa al número sobre la recta numérica
- 12) a) V  
b) F  
c) F  
d) V
- 13) Si dos ó más números tiene el mismo signo se suman y se pone el signo que tiene en común y si tiene signos contrarios se restan sus valores absolutos y el resultado tiene el signo del de mayor valor absoluto.

14) Si al multiplicarse los dos números tienen el mismo signo el producto es positivo y si los dos números tienen signos contrarios el producto es negativo.  
Si al dividirse los dos números tienen el mismo signo el cociente es positivo y si los dos números tienen signos contrarios el cociente es negativo.

- |          |       |          |       |
|----------|-------|----------|-------|
| 15) 12   |       | 25) 0    |       |
| 16) -50  |       | 26) 4    |       |
| 17) -25  |       | 27) -3   |       |
| 18) 6    |       | 28) -1   |       |
| 19) 0    |       | 29) 0    |       |
| 20) -137 |       | 30) 1    |       |
| 21) -15  |       | 31) 2401 |       |
| 22) 72   |       | 32) 1728 |       |
| 23) -60  |       | 33) -9   |       |
| 24) -42  |       | 34) -1   |       |
| 35) c    | 36) a | 37) b    | 38) b |

### Página 13 (prioridad de operaciones con enteros)

- 1) Se realizan las multiplicaciones ó divisiones, potencias ó radicales indicados y al final se suman ó restan.
  - 2) Adición, sustracción multiplicación, división, radicación y potenciación.
  - 3) La potencia pues por jerarquía al final se resta.
  - 4) La multiplicación de 5 por 6.
  - 5) Se restará  $25 - 3$  ó se multiplica por 4 el 25 y por  $-3$ , ya que resulta lo mismo.
- |       |       |
|-------|-------|
| 6) d  | 11) d |
| 7) b  | 12) a |
| 8) d  | 13) c |
| 9) d  | 14) b |
| 10) b | 15) a |

### Página 15 (números racionales)

1) Es el que se puede expresar como la razón de dos números enteros, representado por

$$\frac{a}{b} \text{ donde } b \neq 0$$

- 2) Números racionales.
- |      |       |
|------|-------|
| 3) a | 8) a  |
| 4) b | 9) a  |
| 5) d | 10) b |
| 6) a | 11) c |
| 7) c | 12) e |

### Página 17 (números racionales)

- 1) Mayor
- 2) De orden o tricotomía

3) a) Verdadera    b) Falsa    c) Falsa    d) Verdadera    e) Verdadera

4)

- |      |      |
|------|------|
| a) > | f) < |
| b) < | g) < |
| c) = | h) > |
| d) > | i) = |
| e) = | j) < |

5) a) B    b) F    c) D    d) C    e) E    f) A  
6)

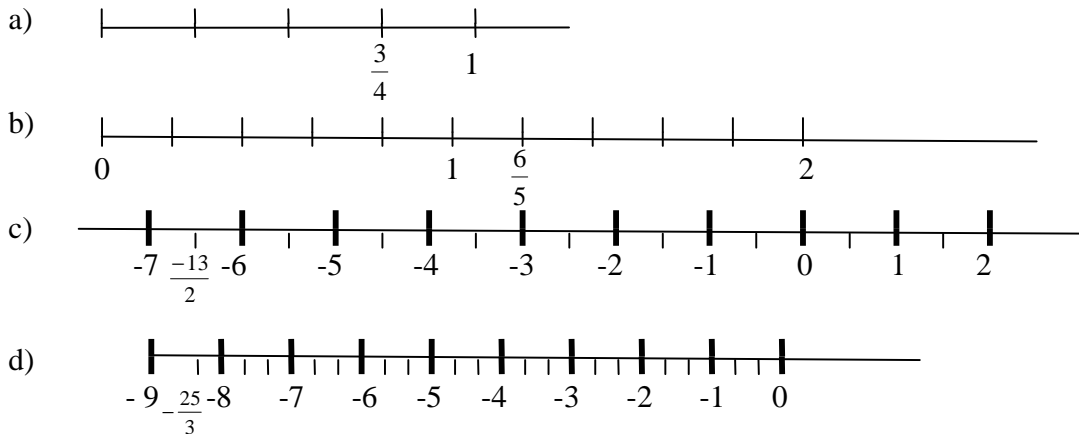
	FRACCIÓN DECIMAL	NÚMERO DECIMAL	LECTURA DEL NÚMERO DECIMAL
a)	$\frac{2}{100}$	0.02	Dos centésimas
b)	$\frac{35}{10}$	3.5	Treinta y cinco décimos
c)	$\frac{72}{1000}$	0.072	Setenta y dos milésimos

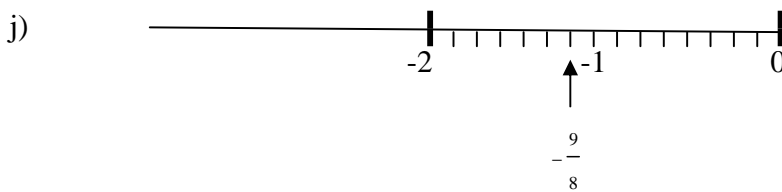
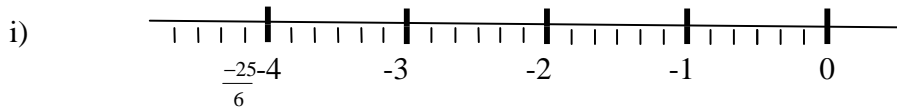
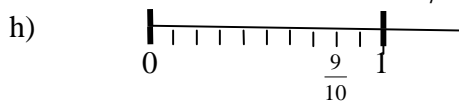
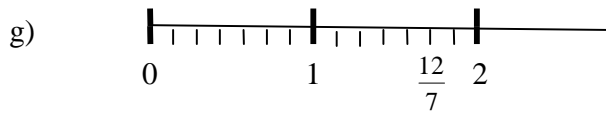
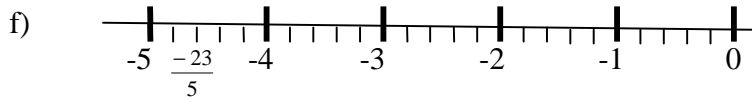
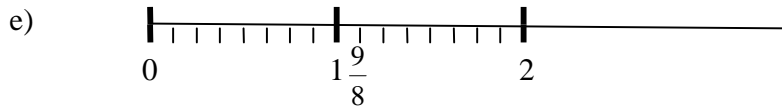
7)

a)  $\frac{5}{10} = 0.5$     b)  $\frac{-5}{8} = -1.6$     c)  $\frac{3}{8} = 0.375$     d)  $-\frac{5}{3} = -1.\bar{6}$

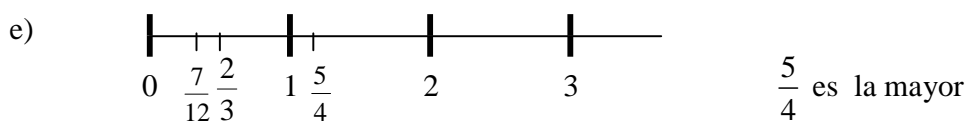
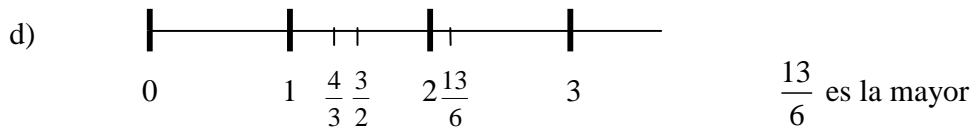
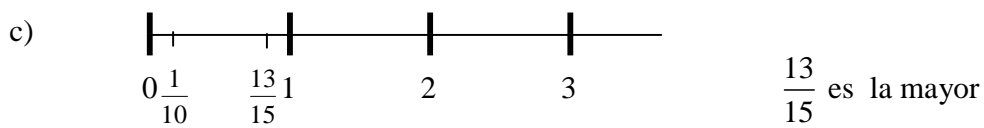
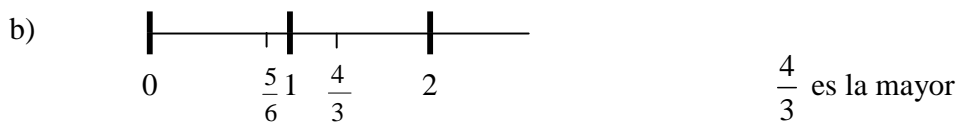
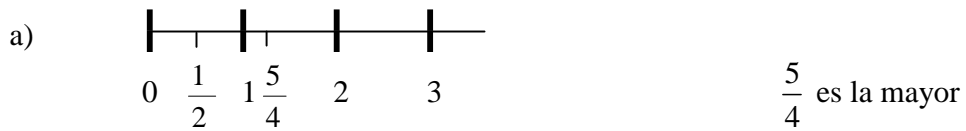
$0.5 > 0.375 > -1.6 > -1.\bar{6}$

8)





9)



10)

a) <      b) <      c) =      d) =      e) <

11)

a)  $\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$       b)  $-\frac{35}{25} = -\frac{14}{10} = -\frac{49}{35}$       c)  $-\frac{6}{2} = -\frac{9}{3} = -\frac{15}{5}$

d)  $-\frac{3}{21} = -\frac{4}{28} = -\frac{5}{35}$       e)  $\frac{9}{6} = \frac{15}{10} = \frac{21}{14}$

12) a)  $\frac{3}{4}$       b)  $-\frac{1}{5}$       c)  $\frac{8}{7}$       d)  $\frac{6}{11}$       e)  $\frac{4}{5}$

13) a)  $\frac{7}{10}$       b)  $\frac{17}{18}$       c) 0      d)  $-\frac{1}{50}$       e)  $\frac{15}{32}$

**Página 22 (operaciones con racionales)**

- |      |       |
|------|-------|
| 1) d | 7) e  |
| 2) c | 8) a  |
| 3) a | 9) c  |
| 4) d | 10) a |
| 5) c | 11) d |
| 6) b | 12) b |

**Página 24 (potencias y radicales)**

- 1) a) Verdadera  
b) Falsa  
c) Falsa  
d) Verdadera  
e) Falsa
- 2) a) - 9  
b) 9  
c) - 64  
d) 64  
e) 8  
f) - 16
- 3) a) Verdadera  
b) Falsa  
c) Falsa  
d) Verdadera  
e) Verdadera

- 4) a) El resultado es un número imaginario  
 b) Por ley de exponentes  
 c) Puede ser número racional o número irracional  
 d) Irracional
- 5) a) Entero, racional, real  
 b) Natural, entero, racional, real  
 c) Irracional, real  
 d) Racional, real  
 e) Imaginario
- 6) a) 8  
 b)  $2\sqrt{2}$   
 c)  $2\sqrt{3}$   
 d)  $2\sqrt[3]{2}$   
 e)  $3\sqrt[3]{3}$   
 f)  $4\sqrt[3]{2}$
- 7) a)  $7\sqrt{2} - 8$   
 b)  $7\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$   
 c) 4  
 d) 2  
 e)  $-8\sqrt{21}$
- f) 18  
 g) 2500  
 h) 3  
 i)  $2\sqrt[3]{7}$   
 j)  $\sqrt[4]{39}$

**Página 26 (problemas con racionales)**

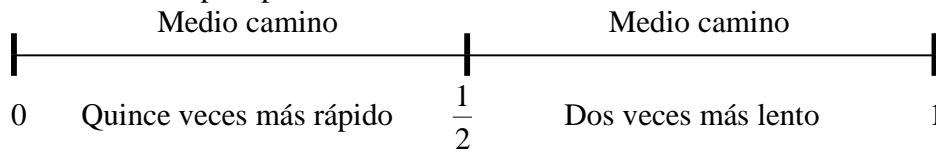
1) Tomemos como unidad (1) el tiempo que tardaría el campesino en ir a la ciudad a pie. La primera mitad del camino, la hubiera recorrido en  $\frac{1}{2}$  del tiempo si hubiera ido a pie.

Como fue en tren, 15 veces más de prisa, tardo  $\frac{1}{15}$  del tiempo esperado y como  $\frac{1}{15}$  de  $\frac{1}{2}$  es  $\frac{1}{15} * \frac{1}{2} = \frac{1}{30}$ , en la primera mitad del camino uso  $\frac{1}{30}$  de nuestra unidad.

La segunda mitad del camino, la hubiera recorrido en  $\frac{1}{2}$  del tiempo si hubiera ido a pie.

Como viajó en la carreta de bueyes, dos veces más despacio, tardó 2 veces del tiempo esperado, esto es:  $2 * \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$ . Al sumar el tiempo que utilizó en las dos mitades del camino, tenemos que utilizó  $\frac{1}{30} + 1 = 1\frac{1}{30}$  del tiempo que es nuestra unidad.

Tenemos entonces que el campesino usó más tiempo en su recorrido que el que hubiera usado yendo todo el tiempo a pie.



2) Tardó 11 días, durante los primeros 10 días, el caracol sube 10 metros (uno cada día), y durante el último día sube 5 metros más, es decir, llega a la cima del árbol.

3) Este problema tiene no una, sino tres soluciones distintas, esto es:

$$123 + 4 - 5 - 67 = 55$$

$$1 - 2 - 3 - 4 + 56 + 7 = 55$$

$$12 - 3 + 45 - 6 + 7 = 55$$

4) Dedicar más tiempo a dormir y menos tiempo a su aseo personal.

$$5) 1\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{1}{8} = \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{17}{8} = \frac{12+14+17}{8} = \frac{43}{8} = 5\frac{3}{8}$$

5 días completos y  $\frac{3}{8}$  de otro día.

6) a)  $\frac{3}{8}$  partes    b)  $\frac{3}{8}$  partes    c)  $\frac{1}{4}$  parte    d)  $\frac{5}{8}$  partes    e)  $\frac{3}{4}$  partes

7) c

10) b

8) d

11) b

9) d

12) b

### Página 30 (variación directamente proporcional)

3)  $d = Rt$ ,                       $d = 3t$   
 t es la variable independiente  
 d es la variable dependiente

5) y es la variable dependiente y x es la variable independiente.

6) Solución: a)  $f(1) = -3 \times 1 + 4$   
 $f(1) = 1$

b)  $f(-1) = -3(-1) + 4 = 3 + 4$   
 $f(-1) = 7$

c)  $f(0) = -3 \times 0 + 4 = 4$   
 $f(0) = 4$

7) Solo representan una relación de proporcionalidad directa la segunda y la tercera tablas.

8)

U	v
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35

$$v = 7u$$

g	F
1.7	1.7
3	3
4.5	4.5
9	9
11.	11.
8	8
21	21

$$F = g$$

m	E
.3	3
.5	5
.9	9
1	10
1.1	11

$$E = 10m$$

f	L
35	7
40	8
45	9
50	10
55	11
60	12

$$L = \frac{1}{5}f$$

q	Q
7.5	3.6
10	4.8
5	2.4
15	7.2
25	12
20	9.6

$$Q = 0.48q$$

w	P
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
5	$\frac{5}{5}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{4}$

$$P = \frac{1}{2}w$$

9) Al multiplicar extremos por extremos y medios por medios, resulta:  $12x = 3 \times 28$ , de donde se obtiene que  $x = -7$

10) a)  $m_2 = 13.5$

b)  $p_2 = 42$

c)  $y_1 = 10$

d)  $h_1 = 2.25$

### Página 33 (función lineal)

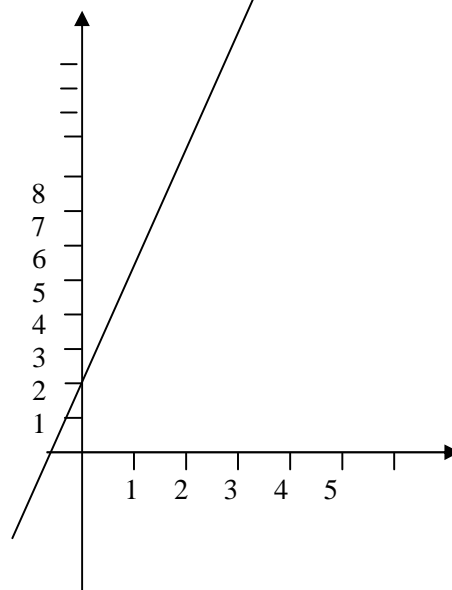
1) Es una función de la forma  $f(x) = ax + b$

2) Tablas, gráficas o modelos algebraicos.

3)

x	y
1	5
2	8
3	11
4	14
5	17

4)





Observa los parámetros  $a$  que define la inclinación de la recta y  $b$  que es donde la recta corta al eje de las ordenadas.

5)  $f(x) = 2x - 1$

**Página 34 (función lineal)**

1) Es una medida de la inclinación de la recta y es igual a  $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

2) a) Si existe variación directamente proporcional

b)  $\Delta x = 4 - 1 = 3$

c)  $\Delta y = 18 - 6 = 12$

d)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12}{3} = 4$

e) La pendiente es 4.

3) a) Si existe variación directamente proporcional

b)  $\Delta x = 4 - 1 = 3$

c)  $\Delta y = 8 - 2 = 6$

d)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{3} = 2$

e) La pendiente es 2.

4) La pendiente es 3.

5) a) i

b) ii

c) i

**Página 36 (función lineal)**

1) Cero.

2) a)  $y = x, y = x + 5, y = x - 5, y = 5$

b)  $y = x, y = 5x, x = 5, y = \frac{1}{5}x$

c)  $y = -x - 5, y = -x + 5, y = -5, y = -x$

3) La abscisa del punto donde la recta corte al eje de las abscisas.

4) La variación con respecto al de otra variable

5) La pendiente es  $\frac{1}{2}$

6) Faltan datos para saberlo

7)

Ecuación	Pendiente	Ordenada al origen
$y = x$	1	0
$y = 7x$	7	0
$y = 4x + 9$	4	9
$y = \frac{1}{2}x - 12$	$\frac{1}{2}$	-12
$y = -x$	-1	0
$y = -13x - \frac{3}{8}$	-13	$-\frac{3}{8}$
$y = 8$	0	8

### Página 38 (función lineal)

- 1) Si  $y$  es costo de elaboración y  $x$  el número de toneladas elaboradas, la función lineal es:  
 $y = 250x + 5000$ .
- 2) Si  $y$  es la depreciación del costo de la lavadora y  $x$  el número de años, la función lineal es:  
 $y = 12000 - 700x$ .

### Página 40 (ecuaciones lineales)

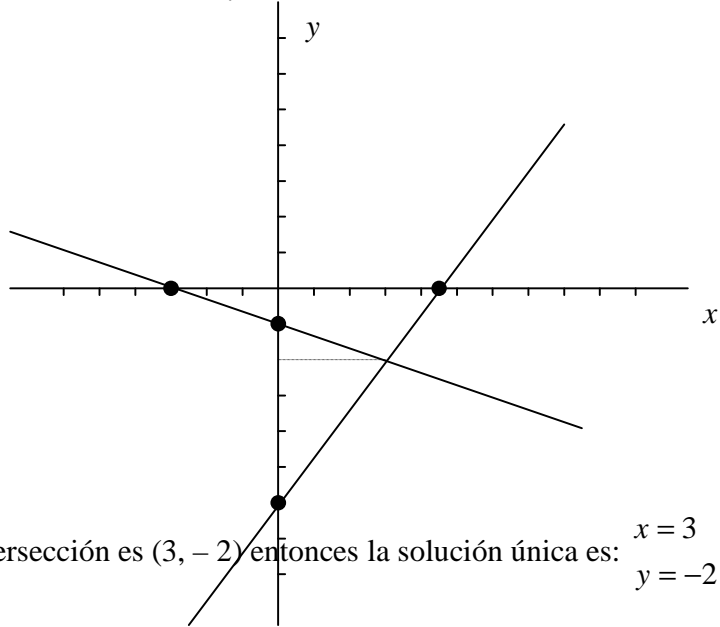
- |       |                                   |                                    |
|-------|-----------------------------------|------------------------------------|
| 1) c  | 15) d                             | 29) La solución es $-2$            |
| 2) a  | 16) e                             | 30) La solución es $-8$            |
| 3) b  | 17) a                             | 31) La solución es $-14$           |
| 4) d  | 18) b                             | 32) La solución es $-\frac{19}{7}$ |
| 5) d  | 19) e                             | 33) La solución es $3$             |
| 6) b  | 20) a                             | 34) La solución es $1$             |
| 7) d  | 21) c                             | 35) La solución es $0$             |
| 8) a  | 22) c                             | 36) La solución es $\frac{26}{7}$  |
| 9) b  | 23) a                             | 37) La solución es $-\frac{11}{3}$ |
| 10) c | 24) b                             | 38) La solución es $-\frac{1}{40}$ |
| 11) c | 25) e                             | 39) La solución es $\frac{51}{5}$  |
| 12) a | 26) a                             | 40) La solución es $-\frac{5}{4}$  |
| 13) b | 27) La solución es $\frac{12}{5}$ |                                    |
| 14) a | 28) La solución es $-\frac{1}{2}$ |                                    |

### Página 45 (ecuaciones lineales)

1. 8.5 horas
2. 300 000 km. en un segundo
3. 13.2475 litros
4. 559.70 watts aproximadamente.
5. 6 m.
6. 13.51 m. aproximadamente
7. 5450 m.
8. 1 a 200 m
9. 11.395 cm.
10.  $0.0016 \text{ cm}^2$
11. a)  $W = kI$       b)  $F = ma$

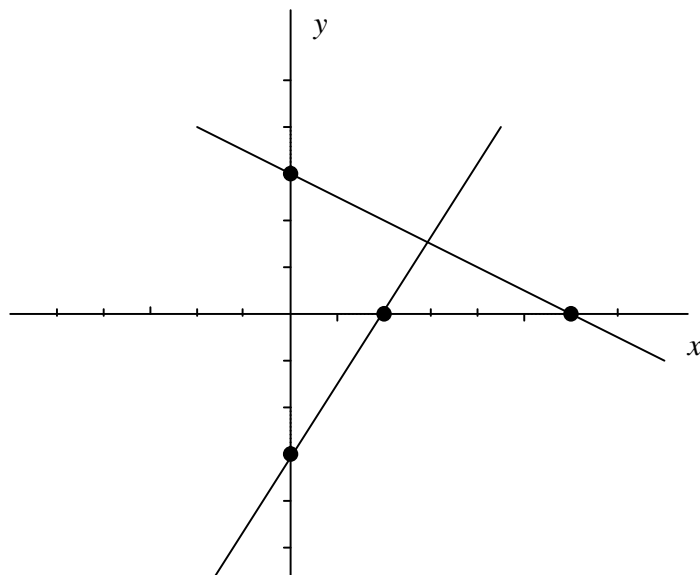
**Página 50 (gráficas de sistemas simultáneos)**

a) Para el sistema de ecuaciones  $y = -\frac{1}{3}x - 1$ , la gráfica es:  
 $4x - 3y = 18$



Como el punto de intersección es  $(3, -2)$  entonces la solución única es:  $x = 3$   
 $y = -2$

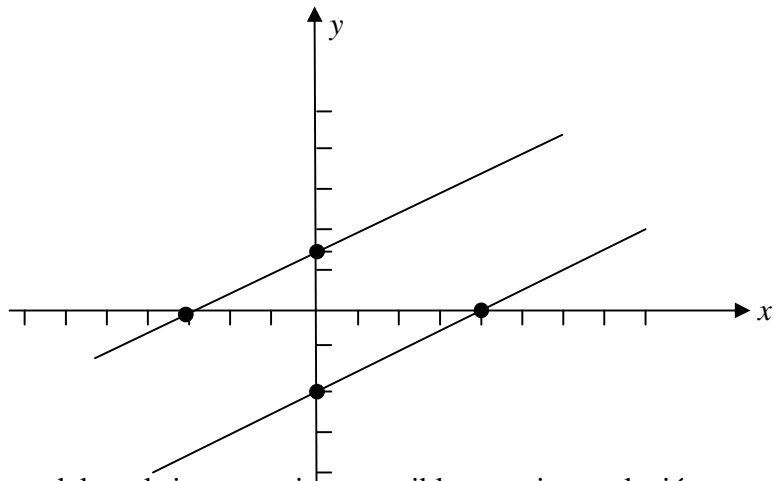
b) Para el sistema de ecuaciones  $2y = 6 - x$ , la gráfica es:  
 $3x - 2y = 6$



Como el punto de intersección parece ser  $(3, \frac{3}{2})$  entonces la solución única sería:  $x = 3$   
 $y = \frac{3}{2}$

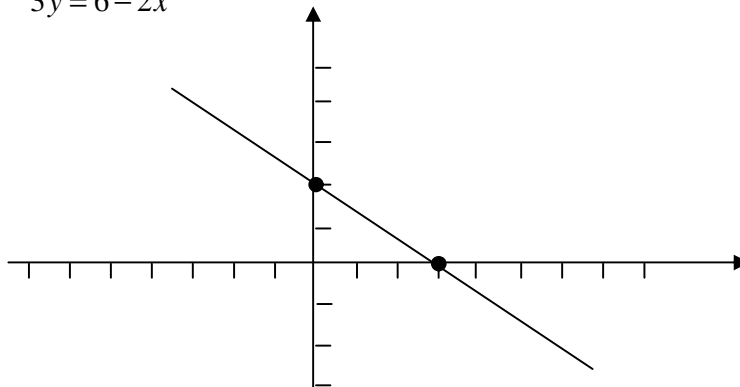
Recuerda que para asegurar que esa sea la solución, es necesario efectuar la solución algebraica.

c) Para el sistema de ecuaciones  $x - 2y = 4$ ,  
 $x - 2y = -3$ , la gráfica es:



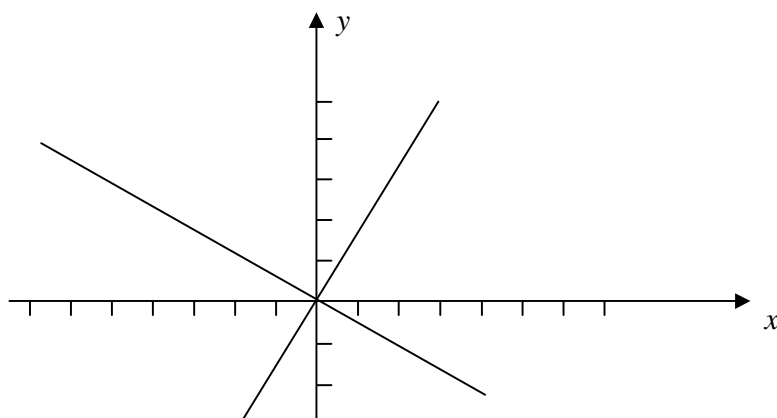
Como las rectas son paralelas, el sistema es incompatible y no tiene solución.

d) Para el sistema  $2x - 6 = -3y$ ,  
 $3y = 6 - 2x$ , la gráfica es:



Como la gráfica de las dos ecuaciones es la misma, el sistema tiene infinitas soluciones

e) Para el sistema de ecuaciones  $2x = -3y$ ,  
 $3y = 4x$ , la gráfica es:



Recuerda que como las dos rectas pasan por el origen, tienes que haber dado para cada una de ellas otros valores para obtener las coordenadas de otro punto y así graficar.

Como el punto de intersección es el origen entonces la solución única es: 
$$\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

**Página 51(solución de sistemas simultáneos por sustitución)**

$$1) \begin{matrix} 7x + y = 15 \cdots (1) \\ 3x + y = 7 \cdots (2) \end{matrix}$$

Despejando x de 2

$$\begin{aligned} 3x + y &= 7 \\ 3x &= 7 - y \\ x &= \frac{7 - y}{3} \cdots (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo 3 en (1)

$$\begin{aligned} 7 \cdot \frac{7 - y}{3} + y &= 15 \\ \frac{49 - 7y}{3} + y &= 15 \\ 3 \left( \frac{49 - 7y}{3} + y \right) &= 15 \cdot 3 \\ 49 - 7y + 3y &= 45 \\ -4y &= 45 - 49 \\ -4y &= -4 \\ y &= \frac{-4}{-4} = 1 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $y = 1$  en (2)

$$\begin{aligned} 3x + 1 &= 7 \\ 3x &= 7 - 1 \\ x &= \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es 
$$\begin{matrix} x = 2 \\ y = 1 \end{matrix}$$

$$2) \begin{matrix} x + 10y - 24 = 0 \cdots (1) \\ 3x - 2y - 8 = 0 \cdots (2) \end{matrix}$$

Despejando x de 1

$$\begin{aligned} x + 10y - 24 &= 0 \\ x &= -10y + 24 \cdots (3) \end{aligned}$$

Sustituyendo en (2)

$$\begin{aligned} 3x - 2y - 8 &= 0 \\ 3(-10y + 24) - 2y - 8 &= 0 \\ -30y + 72 - 2y - 8 &= 0 \\ -32y + 64 &= 0 \\ -32y &= -64 \\ y &= \frac{-64}{-32} = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $y = 2$  en (1)

$$\begin{aligned} x + 10 \cdot 2 - 24 &= 0 \\ x + 20 - 24 &= 0 \\ x - 4 &= 0 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

La solución del sistema es 
$$\begin{matrix} x = 4 \\ y = 2 \end{matrix}$$

**Página 52 (solución de sistema simultáneos por suma o resta)**

$$\begin{aligned} 1) \quad & 4x + 5y + 7 = 0 \cdots (1) \\ & 4x - 5y + 9 = 0 \cdots (2) \end{aligned}$$

Como los coeficientes de  $y$  son simétricos, se suman las ecuaciones 1 y 2

$$\begin{aligned} 4x + 5y + 7 &= 0 \cdots (1) \\ \underline{4x - 5y + 9} &= 0 \cdots (2) \\ 8x + 0 + 16 &= 0 \\ 8x &= -16 \\ x &= \frac{-16}{8} = -2 \end{aligned}$$

Sustituyendo  $x = -2$  en 1

$$\begin{aligned} 4(-2) + 5y + 7 &= 0 \\ -8 + 5y + 7 &= 0 \\ 5y - 1 &= 0 \\ 5y &= 1 \\ y &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

La solución del sistema es  $x = -2$   
 $y = \frac{1}{5}$

$$\begin{aligned} 2) \quad & 3x + 4y = 10 \cdots (1) \\ & 2x - 5y = -4 \cdots (2) \end{aligned}$$

Para que los coeficientes de  $x$  sean simétricos en el sistema, se multiplican la ecuación (1) por 2 y la (2) por  $-3$  y se suman

$$\begin{aligned} 2(3x + 4y) &= 10 \cdot 2 \\ -3(2x - 5y) &= -4(-3) \\ \text{quedando} & \\ 6x + 8y &= 20 \\ \underline{-6x + 15y} &= 12 \\ 0 + 23y &= 32 \\ y &= \frac{32}{23} \end{aligned}$$

Sustituyendo  $y = \frac{32}{23}$  en 2

$$\begin{aligned} 2x - 5 \cdot \frac{32}{23} &= -4 \\ 2x - \frac{160}{23} &= -4 \\ \text{multiplicando por 23} & \\ 23 \left( 2x - \frac{160}{23} \right) &= -4 \cdot 23 \\ 46x - 160 &= -92 \\ 46x &= -92 + 160 \\ x &= \frac{68}{46} = \frac{34}{23} \end{aligned}$$

La solución del sistema es  $x = \frac{34}{23}$   
 $y = \frac{32}{23}$

**Página 53(solución de sistemas simultáneos por igualación y los otros métodos)**

$$1) \begin{aligned} 2x - 3y &= 9 \cdots (1) \\ 3x + 2y &= 7 \cdots (2) \end{aligned}$$

Despejando  $x$  de 1 y 2

$$2x - 3y = 9 \quad 3x + 2y = 7$$

$$2x = 9 + 3y \quad 3x = 7 - 2y$$

$$x = \frac{9+3y}{2} (3) \quad x = \frac{7-2y}{3} (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$\frac{9+3y}{2} = \frac{7-2y}{3}$$

*multiplicando por 6*

$$6 \cdot \frac{9+3y}{2} = \frac{7-2y}{3} \cdot 6$$

$$3(9+3y) = 2(7-2y)$$

$$27+9y = 14-4y$$

$$9y+4y = 14-27$$

$$13y = -13$$

$$y = \frac{-13}{13} = -1$$

Sustituyendo  $y = -1$  en (1)

$$2x - 3(-1) = 9$$

$$2x + 3 = 9$$

$$2x = 9 - 3$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

La solución del sistema es  $\begin{matrix} x = 3 \\ y = -1 \end{matrix}$

- 3) b
- 4) c
- 5) b
- 6) b
- 7) a
- 18) c

- 8) b
- 9) c
- 10) a
- 11) c
- 12) b
- 19) a
- 20) b

$$2) \begin{aligned} 7x + y - 4 &= 0 \cdots (1) \\ 4x - 2y - 1 &= 0 \cdots (2) \end{aligned}$$

Despejando  $y$  de 1 y 2

$$7x + y - 4 = 0 \quad 4x - 2y - 1 = 0$$

$$y = -7x + 4 (3) \quad 2y = 4x - 1$$

$$y = \frac{4x-1}{2} (4)$$

Igualando (3) y (4)

$$-7x + 4 = \frac{4x-1}{2}$$

*multiplicando por 2*

$$2(-7x + 4) = \frac{4x-1}{2} \cdot 2$$

$$-14x + 8 = 4x - 1$$

$$-14x - 4x = -1 - 8$$

$$-18x = -9$$

$$x = \frac{-9}{-18} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo  $x = \frac{1}{2}$  en (2)

$$4 \cdot \frac{1}{2} - 2y - 1 = 0$$

$$2 - 2y - 1 = 0$$

$$-2y + 1 = 0$$

$$-2y = -1$$

$$y = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

La solución del sistema es  $\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}$

- 13) b
- 14) b
- 15) c
- 16) c
- 17) b
- 21) e
- 22) a

**Página 57 (problemas de sistemas simultáneos de ecuaciones)**

1. Tendrá que mezclar 48 kg. de los de \$ 70.00 y 72 kg. de los de \$45.00
2. El número original es 76.
3. Vendió 250 boletos de adulto y 200 boletos de niño.
4. Uno de los ángulos mide  $18^\circ$  y el otro  $72^\circ$
5. Tiene 28 monedas de \$2.00 y 31 monedas de \$5.00

**Página 61 (ecuaciones cuadráticas y solución por factorización)**

- 1) Ecuación de la forma  $ax^2 + bx + c = 0$
  - 2) Cuando los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  son diferentes de cero, es decir, tiene los tres términos: el cuadrático, el lineal y el independiente.
  - 3) Cuando el coeficiente del término lineal  $b$  o el término independiente  $c$  o ambos son cero, es decir, carece del término lineal o del independiente o ambos
  - 4) Completando el trinomio cuadrado perfecto y la fórmula general.
  - 5) Dos o una si es de multiplicidad 2
- |       |       |
|-------|-------|
| 6) d  | 16) a |
| 7) a  | 17) d |
| 8) a  | 18) c |
| 9) d  | 19) b |
| 10) c | 20) a |
| 11) b | 21) a |
| 12) b | 22) b |
| 13) c | 23) a |
| 14) b | 24) c |
| 15) b | 25) c |

**Página 66(solución de ecuaciones cuadráticas completando el trinomio cuadrado perfecto)**

- 1) d
- 2) c



3)

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

*Completando el trinomio cuadrado*

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - 15 = 0$$

$$x^2 + 2x + 1 - 16 = 0$$

*Factorizando*

$$(x+1)^2 - 16 = 0$$

$$\left(\sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{16}\right)\left(\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{16}\right) = 0$$

*se cumple si*

$$x+1-4=0 \quad \text{ó} \quad x+1+4=0$$

$$x-3=0 \quad x+5=0$$

$$x=3 \quad \text{y} \quad x=-5$$

5)

$$x^2 - x - 12 = 0$$

*Completando el trinomio cuadrado*

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 12 = 0$$

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{49}{4} = 0$$

*Factorizando*

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} = 0$$

$$\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} - \sqrt{\frac{49}{4}}\right)\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\frac{49}{4}}\right) = 0$$

*se cumple si*

$$x - \frac{1}{2} - \frac{7}{2} = 0 \quad \text{ó} \quad x - \frac{1}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

$$x-4=0 \quad x+3=0$$

$$x=4 \quad x=-3$$

4)

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

*Completando el trinomio cuadrado*

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + 1 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 3 = 0$$

*Factorizando*

$$(x-2)^2 - 3 = 0$$

$$\left(\sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{(x-2)^2} + \sqrt{3}\right) = 0$$

*se cumple si*

$$x-2-\sqrt{3}=0 \quad \text{ó} \quad x-2+\sqrt{3}=0$$

$$x=2+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad x=2-\sqrt{3}$$

6)

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

*Dividiendo entre 3*

$$x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

*Completando el trinomio cuadrado*

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = 0$$

*Factorizando*

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = 0$$

$$\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} - \sqrt{\frac{4}{9}}\right)\left(\sqrt{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2} + \sqrt{\frac{4}{9}}\right) = 0$$

*se cumple si*

$$x - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = 0 \quad \text{ó} \quad x - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$$

$$x-1=0 \quad x+\frac{1}{3}=0$$

$$x=1 \quad \text{y} \quad x=-\frac{1}{3}$$

**Página 70 (solución de ecuaciones cuadráticas por fórmula general)**

- 1) c
- 2) a
- 3) a

4)

$$x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$$x = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad y \quad x = \frac{-3 - 7}{2} = \frac{-10}{2} = -5$$

5)

$$x^2 + 6x + 6 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{2}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{12}}{2} \quad y \quad x = \frac{-6 - \sqrt{12}}{2}$$

6)

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 2 \times (-15)}}{2 \times 2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x = \frac{7 + 13}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad y \quad x = \frac{7 - 13}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

7)

$$3x^2 + 6x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times (-5)}}{2 \times 3}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 60}}{6}$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{96}}{6}$$

$$x = \frac{-6 + \sqrt{96}}{6} \quad y \quad x = \frac{-6 - \sqrt{96}}{6}$$

8)

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm 2i}{2}$$

$$x = \frac{-4 + 2i}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-4 - 2i}{2}$$

Las raíces son complejas

### **Página 72 (problemas con ecuaciones cuadráticas)**

#### **Respuestas**

La ecuación simplificada es  $x^2 - 5x - 126 = 0$ , sus raíces son 14 y  $-9$ , pero solo el 14 es posible utilizarlo para obtener la solución del problema ya que representa una longitud la cual no debe ser negativa.

La solución del problema es: La altura del escenario es de 18 m y el ancho 14 m.

- Problemas:
1. Los números son 9 y 14.
  2. El perímetro es 44 m.
  3. El número de asientos por fila es de 30.
  4. Los factores son  $-9$  y  $-21$
  5. Las dimensiones del rectángulo son 5 m de ancho y 12 m. de largo.