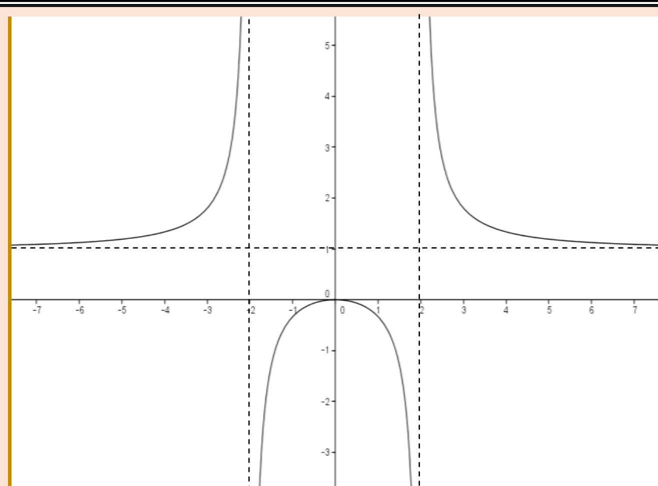
UNIDAD 2

FUNCIONES RACIONALES Y CON RADICALES

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

Al término de la unidad, el alumno:

- Establecerá la regla de correspondencia de una función racional y el de una función con radicales
- Identificará el dominio y rango
- Comprenderá las relaciones entre los parámetros de las funciones racionales y con radicales con sus respectivas gráficas
- Interpretará resultados de la tabla o de la gráfica y o0btendrá conclusiones sobre el problema correspondiente



$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

Tabla de contenido

2. FUNCIONALES RACIONALES Y CON RADICALES

2.1. INTRODUCCIÓN

En esta unidad continuaremos con el estudio de las funciones y en particular las funciones racionales y las funciones con radicales. Se analizará su comportamiento dando relevancia a su dominio y a su rango y para las funciones racionales, los puntos de ruptura y además se verificará la relación de dichos puntos con las asíntotas verticales. Para tal efecto iniciamos con el planteamiento de fenómenos en los que se involucran funciones racionales.

Cuando se habla de un modelo matemático para un fenómeno del mundo real, se refiere a una función que describe por lo menos de manera aproximada la dependencia de una cantidad física de otra. Por ejemplo:

- La ley de Boyle dice que cuando una muestra de gas se comprime a una temperatura constante, la presión del gas es inversamente proporcional al volumen del mismo.
- El número de días que se necesitan para completar un trabajo varía inversamente con el número de hombres que t5abajan en él, si lo hacen con igual rapidez.
- La base de un triángulo de área constante varía inversamente con su altura.
- El volumen de un gas a temperatura constante varía inversamente con su presión.
- La presión es inversamente proporcional con su altura.
- La temperatura a la que hierve el agua varía inversamente con el número de metros sobre el nivel del mar.
- El monto de capital necesaria para producir un ingreso dado varía inversamente con la tasa de interés.
- La fuerza necesaria para levantar una roca varía inversamente con la longitud de la palanca usada.
- La iluminación de un objeto varía inversamente con el cuadrado de la distancia de la fuente luminosa al objeto.

- El volumen de un gas varía directamente con la temperatura e inversamente con la presión.
- La resistencia eléctrica de un cable varía directamente con su longitud e inversamente con el cuadrado de su diámetro.

- La ley de gravitación de Newton dice que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los objetos.

Estos son solo algunos ejemplos de fenómenos del mundo real en los que para construir un modelo matemático que los represente, es necesario hacer uso de las funciones racionales. Para construir la función asociada con uno de los fenómenos planteados y muchos otros, resulta útil recordar lo que significa, la variación directa, la variación inversa, la variación conjunta y la variación combinada.

Variación directa
Si $y = kx$, cuando $k \neq 0$, se dice que y es directamente proporcional con x.

Variación inversa
Si $y = \frac{k}{x}$, cuando $k \neq 0$, se dice que y es inversamente proporcional con x.

Variación conjunta
Si $y = kxy$, cuando $k \neq 0$, se dice que z es conjuntamente proporcional con x y con y.

Variación combinada
Si $y = k\frac{x}{x}$, cuando $k \neq 0$, se dice que z es directamente proporcional con x e inversamente proporcional con y.

En todos los casos la k es la constante de variación o constante de proporcionalidad.

2.2. GRÁFICA, DOMINIO Y RANGO DE FUNCIONES RACIONALES

Tabla de contenido

A continuación se dan las características generales para cada una de estas funciones, se plantean varios ejemplos de funciones racionales en las que se da el dominio, se construye su gráfica y se indica el rango para cada una de ellas y posteriormente se les da solución a algunos de los problemas indicados al inicio de esta sección.

Las funciones raciones son de la forma $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, en las que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, el dominio para estas funciones es $D_f = \mathbb{R} - \{x | q(x) = 0\}$, es decir: son todos los números reales excepto los valores de x para los que la función $q(x)$ es cero. El rango de la función R_f es el intervalo que la gráfica cubre sobre el eje Y,

Antes de iniciar los ejemplos continuaremos haciendo uso de las translaciones y rotaciones ($c > 0$) y además se recuerdan:

1) $y = f(x) + c$ indica desplazar c unidades la función $f(x)$ hacia arriba.
2) $y = f(x) - c$ indica desplazar c unidades la función $f(x)$ hacia abajo.
3) $y = f(x - c)$ indica desplazar c unidades la función $f(x)$hacia la derecha.
4) $y = f(x + c)$ indica desplazar c unidades la función $f(x)$hacia la izquierda.
5) $y = -f(x)$ indica reflejar la función $f(x)$ con respecto al eje X.
6) $y = f(-x)$ in indica reflejar la función $f(x)$ con respecto al eje Y.
7) $y = kf(x)$ y $k > 0$ indica alargar verticalmente la función $f(x)$ por un factor k, alejándose del eje X.
8) $y = kf(x)$ y $k < 0$ indica contraer verticalmente la función $f(x)$, por un factor k, hacia el eje X.

Observación. Para utilizar estas translaciones y rotaciones al graficar algunas funciones, se indicará el número (1,2,3,...,8) y la notación TR.

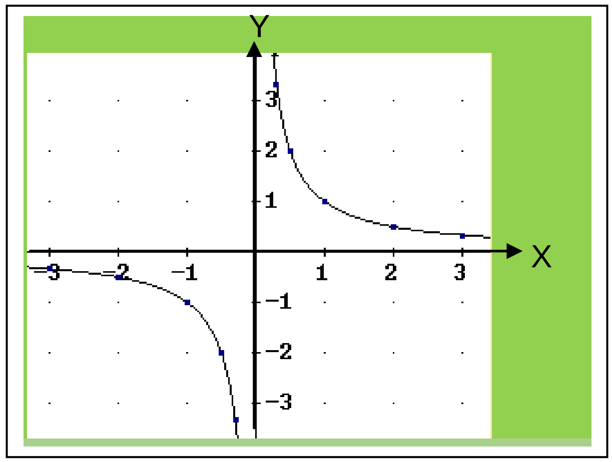
Ejemplos

Para cada una de las funciones que se dan, indique el dominio construya la gráfica y diga cuál es el rango.

1) $f(x) = \frac{1}{x}$ Prác1. F. Rac.

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ y para la gráfica construimos la tabla siguiente:

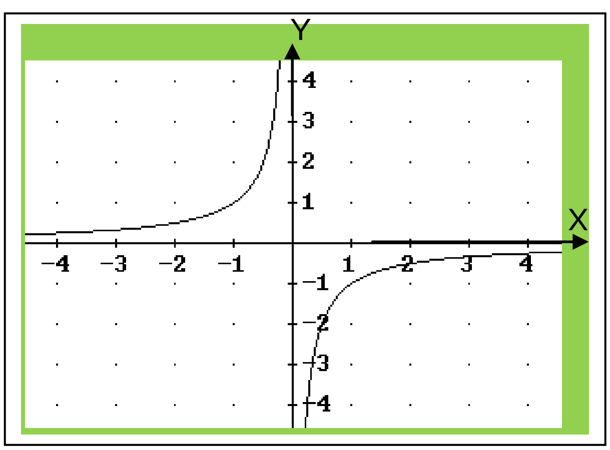
x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-3	-0.33
-2	-0.5
-1	-1
-0.5	-2
-0.3	-3.33
0.3	3.33
0.5	2
1	1
2	0.5
3	0.33



El rango para la función es $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$

2) $f(x) = -\frac{1}{x}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ y para la construcción de la gráfica se usa el número 5 de TR y esto ocasiona que la gráfica del ejemplo 1, se refleje con respecto al eje X. Luego la gráfica es:



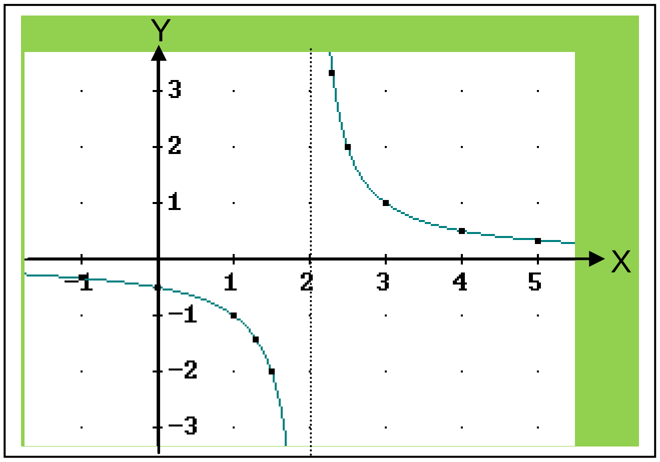
El rango para la función es $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

.

3) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ y para la construcción de la gráfica usamos el número 3 de TR, la cual provoca que la gráfica del ejemplo 1, se traslade 2 unidades hacia la derecha. La gráfica es:

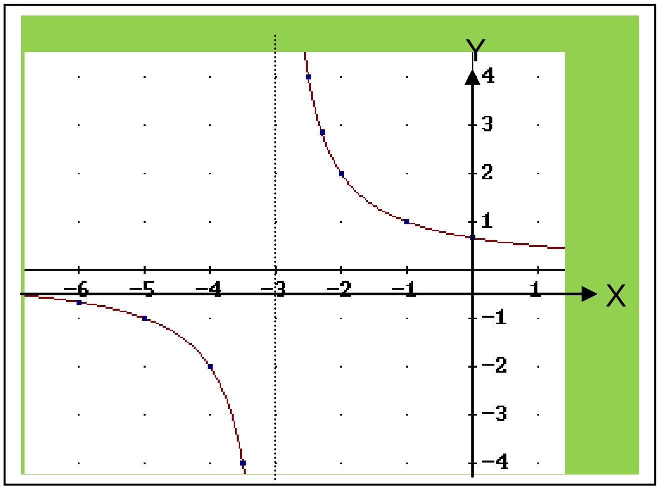
x	$f(x) = \frac{1}{x-2}$
-1	-0.33
-0	-0.5
1	-1
1.3	-2
1.5	-3.33
2.3	3.33
2.5	2
3	1
4	0.5
5	0.33



El rango de la función es: $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

4) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{3\}$ y para la gráfica usamos el número 4 de TR y esta traslación provoca que la gráfica del ejemplo 1 se recorra 3 unidades hacia la izquierda, además también se usa el número 7 de TR, la cual ocasiona que la gráfica se alargue verticalmente, por el factor 2. En la gráfica se podrá observar que el movimiento que provoca el número 7 de TR no es tan notorio para este tipo de funciones y depende en gran medida de la escala que se trabaje:



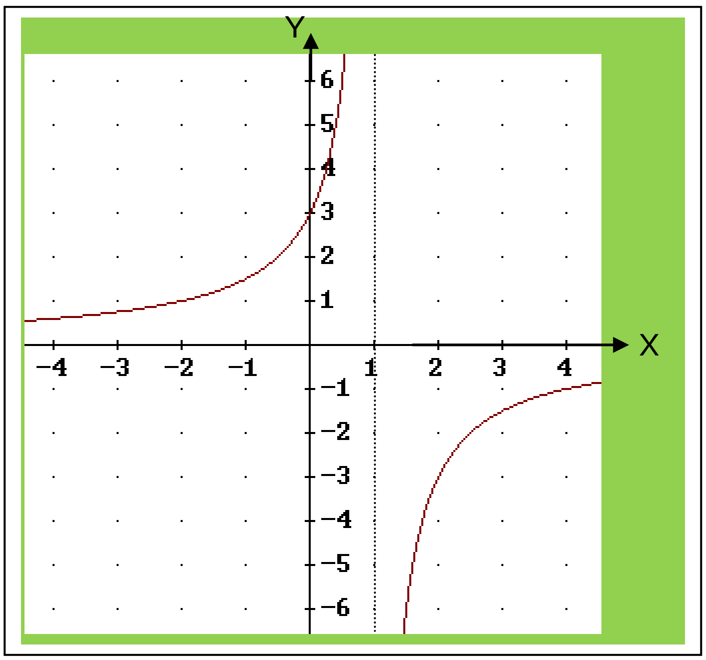
El rango para la función es $R_f = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) = \mathbb{R} - \{0\}$.

5) $f(x) = \frac{3}{1-x}$

El dominio es: $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$. En la función, podemos hacer lo siguiente:

$$f(x) = \frac{3}{1-x} = \frac{3}{-(x-1)} = -\frac{3}{x-1}$$

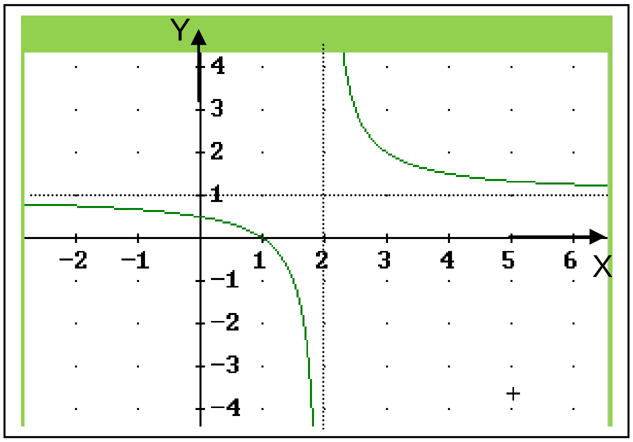
en el ejemplo 2, al utilizar el número 3 de TR la gráfica se recorre 1 unidad hacia la derecha y el número 7 de TR alarga verticalmente por un factor 3 la gráfica.



El $R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

6) $f(x) = \frac{1}{x-2} + 1$

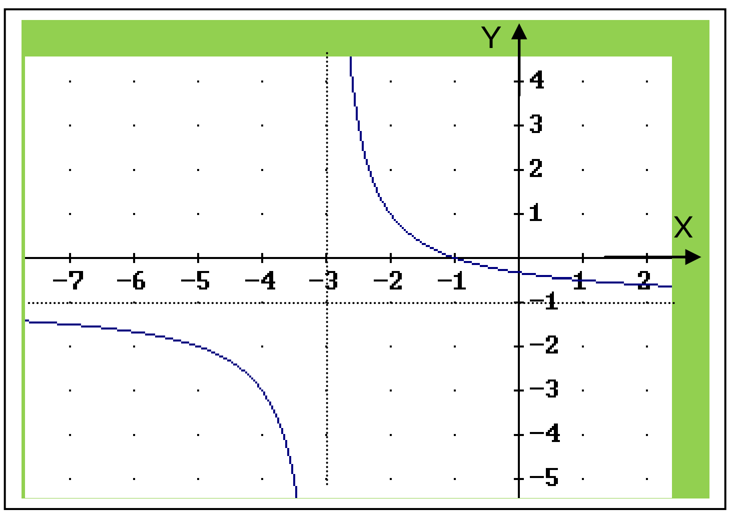
El $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. La gráfica para esta función, se obtiene al subir 1 unidad la gráfica del ejemplo 3 y este movimiento se justifica al utilizar el número 1 de TR.



El $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$

7) $f(x) = \frac{2}{x+3} - 1$

El $D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$. La gráfica para esta función, se obtiene al bajar 1 unidad la gráfica del ejemplo 4 y este movimiento se justifica al usar el número 2 de TR.



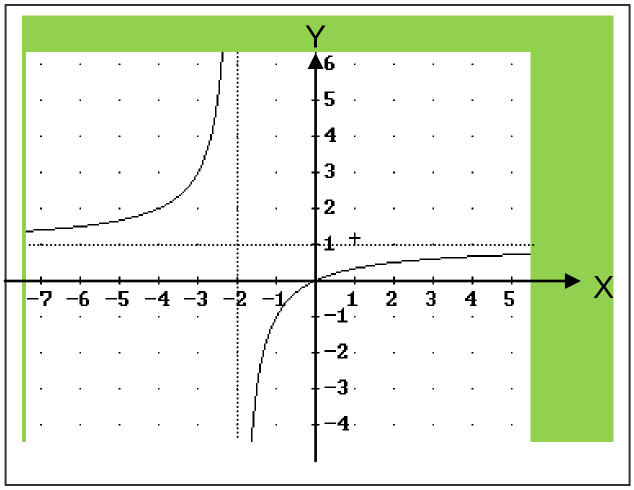
El $R_f = \mathbb{R} - \{-1\}$

8) $f(x) = \frac{x}{x+2}$

El $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ y para el trazo de la gráfica se realiza la división y se obtiene que:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = 1 - \frac{2}{x+2} = -\frac{2}{x+2} + 1$$

la gráfica de esta función se obtiene al recorrer dos unidades la izquierda la gráfica del ejemplo 2 (se usa el número 4 de TR), se alarga verticalmente por el factor 2 (número 7 de TR) y se sube una unidad (número 1 de TR).



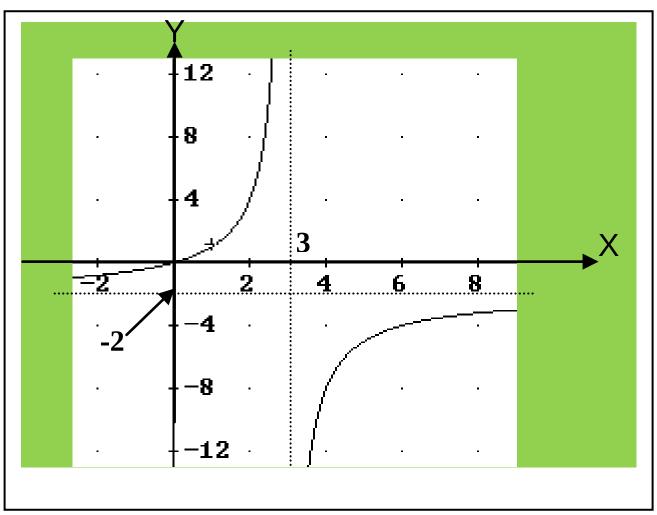
El rango para la función es $R_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

9) $f(x) = \frac{2x}{3-x}$

El$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$, nuevamente para el trazo de la gráfica se realiza la división y se obtiene que:

$$f(x) = \frac{2x}{3-x} = -2 + \frac{6}{3-x} = -2 - \frac{6}{x-3} = -\frac{6}{x-3} - 2$$

la gráfica de esta función se obtiene al recorrer tres unidades a la derecha la gráfica del ejemplo 1 (se usa el número 3 de TR), se alarga verticalmente por el factor 6 (número 7 de TR), se refleja con respecto al eje X (número 5 de TR) y se baja dos unidades (número 2 de TR).



El rango para la función es $R_f = \mathbb{R} - \{-2\}$

Una forma alternativa y que puede resultar útil para trazar la gráfica de este tipo de funciones es considerar las asíntotas, siendo éstas, rectas horizontales y verticales. Las asíntotas verticales pasan por el valor o valores que se eliminan en el dominio de cada función y las asíntotas horizontales pasan por el cociente que se forma por los coeficientes de la x elevada al mayor exponente, tanto del numerador como del denominador. Bajo estas consideraciones, observamos que:

- En el ejemplo 1, la asíntota vertical pasa por el cero y la asíntota horizontal coincide con el eje X.
- En el ejemplo 2, la asíntota vertical pasa por el cero y la asíntota horizontal coincide con el eje X.
- En el ejemplo 3, la asíntota vertical pasa por el dos y la asíntota horizontal coincide con el eje X.
- En el ejemplo 4, la asíntota vertical pasa por el -3 y la asíntota horizontal coincide con el eje X.
- En el ejemplo 5, la asíntota vertical pasa por el uno y la asíntota horizontal coincide con el eje X.
- En el ejemplo 6, la asíntota vertical pasa por el dos y la asíntota horizontal pasa por el uno, esto es debido a que $\frac{1}{x-2}+1=\frac{x-1}{x-2}$.
- En el ejemplo 7, la asíntota vertical pasa por el -3 y la asíntota horizontal pasa por –1, dado que $\frac{2}{x+3}-1=-\frac{x+1}{x+3}$.
- En el ejemplo 8, la asíntota vertical pasa por el -2 y la asíntota horizontal pasa por el uno.
- En el ejemplo 9, la asíntota vertical pasa por el tres y la asíntota horizontal pasa por el -2.

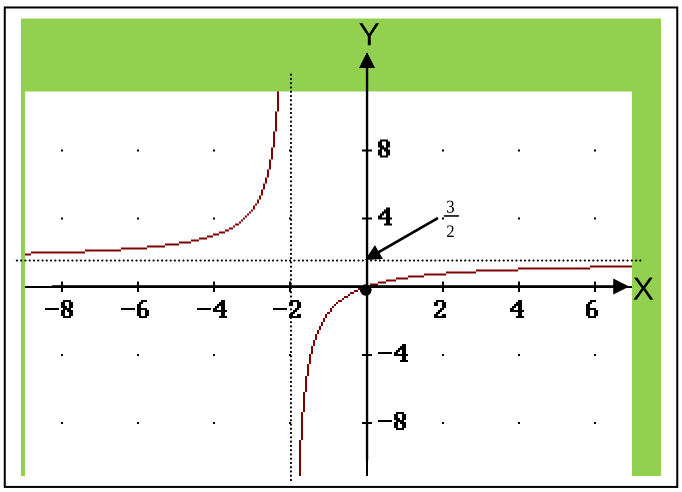
Además podemos observar que en todos los ejemplos, las gráficas resultaron ser curvas que se aproximan cada vez más a las asíntotas y que el rango para cada función fue todos los reales excepto el valor por donde pasa la asíntota horizontal.

En los ejemplos que se trabajan a continuación, se analiza la función en cada intervalo formado por los valores por donde pasan las asíntotas verticales, para saber si la gráfica se encuentra en la parte superior o inferior de la asíntota horizontal y también se continúa para algunos casos con el procedimiento manejado anteriormente.

10) $f(x) = \frac{3x}{2x+4}$

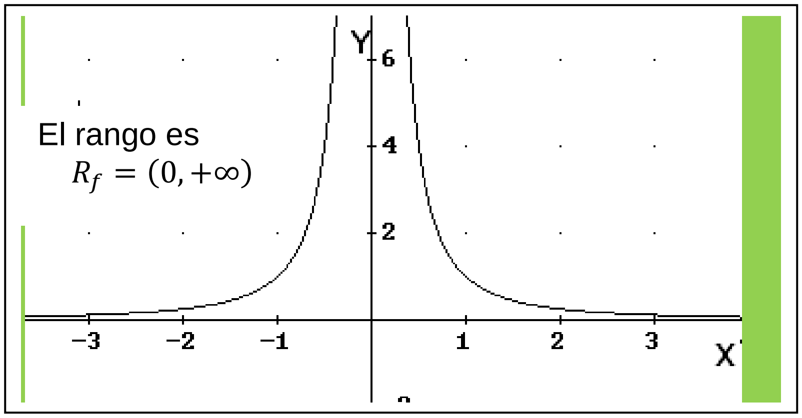
El $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Luego la asíntota vertical pasa por -2 y la asíntota horizontal pasa por $\frac{3}{2}$. Analicemos la gráfica en el intervalo $(-2, +\infty)$, si $x = 0$, entonces $f(0) = \frac{3(0)}{2(0)+4} = 0$ y $0 < \frac{3}{2}$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte inferior de la asíntota horizontal y además pasa por el origen, en el intervalo $(-\infty, -2)$, si $x = -3$, entonces $f(-3) = \frac{3(-3)}{2(-3)+4} = \frac{-6}{-2}$ y $2 > \frac{3}{2}$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte superior de la asíntota horizontal. El rango para la función es:

$$R_f = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$



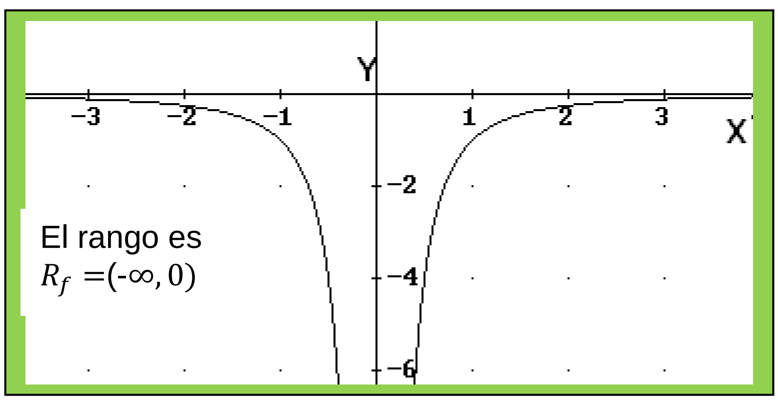
11) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ Práct2. F. Racionales

El $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Luego la asíntota vertical pasa por 0 y la asíntota horizontal coincide con el eje X, esto es debido a que los coeficientes de la x^2 son: 0 en el numerados y 1 en el denominador; es decir, el cociente es $\frac{0}{1} = 0$. Analicemos la gráfica en el intervalo $(0, +\infty)$, si $x = 1$, entonces $f(1) = \frac{1}{1} = 1 > 0$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte superior de la asíntota horizontal, en el intervalo $(-\infty, 0)$, si $x = -1$, entonces $f(-1) = \frac{1}{1}$ =1>0 luego en este intervalo la gráfica también está en la parte superior de la asíntota horizontal. Por lo tanto la gráfica es



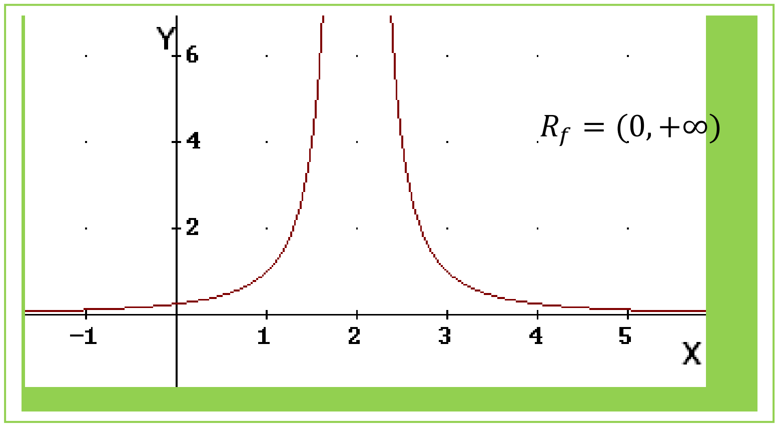
12) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

El $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$. Para trazar la gráfica, se refleja con respecto al eje X (número 5 de TR) la curva del ejemplo 11. Además observemos que la asíntota vertical pasa por el 0 y la asíntota horizontal coincide con el eje X.



13) $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$

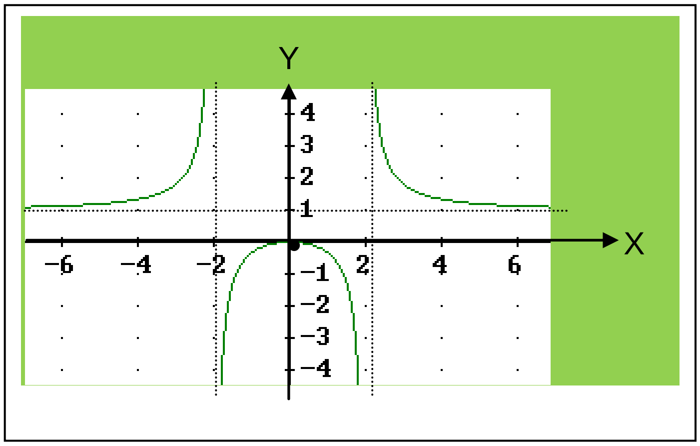
El $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Para trazar la gráfica, se recorre hacia la derecha 2 unidades la curva del ejemplo 11 (número 3 de TR). La asíntota vertical pasa por el 2 y la asíntota horizontal coincide con el eje X.



14) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-4}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -2 y por el 2, la asíntota horizontal pasa por el 1, ya que los coeficientes de las x^2 son 1 tanto en el numerador como en el denominador, es decir: $\frac{1}{1} = 1$. Analicemos la gráfica en el intervalo $(2, +\infty)$, si $x = 3$, entonces $f(3) = \frac{(3)^2}{(3)^2-4} = \frac{9}{5} > 0$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte superior de la asíntota horizontal, en el intervalo $(-\infty, 2)$, si $x = -3$ entonces $f(-3) = \frac{(-3)^2}{(-3)^2-4} = \frac{9}{5} > 0$, de donde se deduce que en dicho intervalo la gráfica está en la parte superior de la asíntota horizontal. Ahora veamos cómo es la gráfica en el intervalo $(-2, 2)$, si $x = 0$, entonces $f(0) = \frac{(0)^2}{(0)^2-4} = 0$, luego la gráfica pasa por el origen. Para observar si a la derecha del origen la gráfica sube o baja, evaluamos la función en $x = 1$, entonces $f(1) = \frac{(1)^2}{(1)^2-4} = \frac{1}{-3} < 0$, luego la gráfica tiende hacia abajo y de la misma forma para ver cuál es el comportamiento a la izquierda del origen, se evalúa la función en $x = -1$ entonces $f(-1) = \frac{(-1)^2}{(-1)^2-4} = \frac{1}{-3} < 0$, esto nos indica que la gráfica también tiende hacia abajo. El

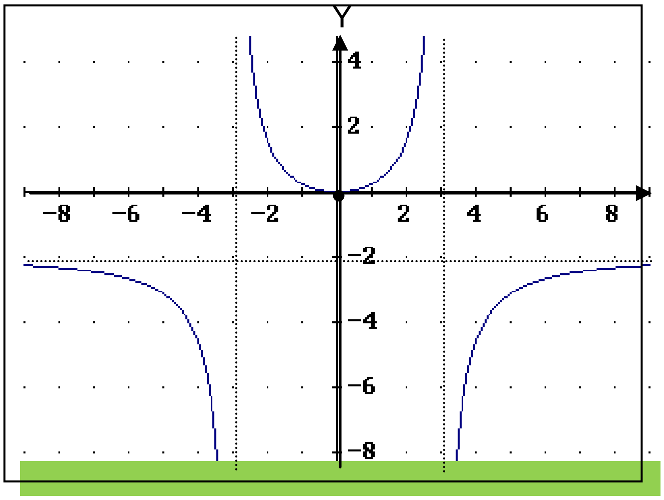
$$R_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) = \mathbb{R} - (0,$$



15) $f(x) = \frac{2x^2}{9-x^2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -3 y por el 3, la asíntota horizontal pasa por el -2, ya que los coeficientes de las x^2 son 2 en el numerador y -1 en el denominador, es decir; $\frac{2}{-1} = -2$. Para observar como es la gráfica, es necesario analizarla en tres intervalos, siendo éstos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 3)$ y $(3, +\infty)$. Si en el intervalo $(3, +\infty)$, $x = 4$ entonces $f(4) = \frac{2(4)^2}{9-(4)^2} = \frac{32}{-7} < -2$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte inferior de la asíntota horizontal, en el intervalo $(-\infty, -3)$, si $x = -4$ entonces

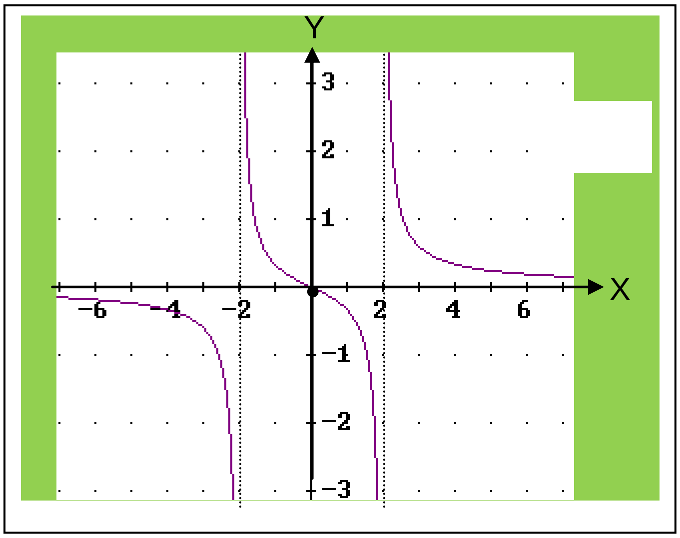
$f(-4) = \frac{2(-4)^2}{9-(-4)^2} = \frac{32}{-7} < -2$, de donde se deduce que en dicho intervalo la gráfica está en la parte inferior de la asíntota horizontal. Ahora veamos cómo es la gráfica en el intervalo $(-3, 3)$, si $x = 0$, entonces $f(0) = \frac{2(0)^2}{9-(0)^2} = \frac{32}{-7} = 0$, luego la gráfica pasa por el origen. Para observar si a la derecha del origen la gráfica sube o baja, evaluamos la función en $x = 1$, entonces $f(1) = \frac{2(1)^2}{9-(1)^2} = \frac{2}{8}$, luego la gráfica tiende hacia arriba y de la misma forma para ver cuál es el comportamiento a la izquierda del origen, se evalúa la función en $x = -1$ entonces $f(-1) = \frac{2(-1)^2}{9-(-1)^2} = \frac{2}{8}$ esto nos indica que la gráfica también tiende hacia arriba.



$R_f = \mathbb{R} - [-2, 0)$

16) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$. Luego las asíntotas verticales pasan por -2 y por el 2, la asíntota horizontal pasa por el 0; es decir coincide con el eje X, ya que la x elevada al máximo exponente es x^2 y cómo en el numerador no aparece esto significa que su coeficiente es cero y en el denominador el coeficiente es 1, es decir: $\frac{0}{1} = 0$. Analizaremos la gráfica en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. Si en el intervalo $(2, +\infty)$, $x = 3$ entonces $f(3) = \frac{3}{(3)^2-4} = \frac{3}{5} > 0$, luego en este intervalo la gráfica está en la parte superior de la asíntota horizontal, en el intervalo $(-\infty, -2)$, si $x = -3$ entonces $f(-3) = \frac{-3}{(-3)^2-4} = \frac{-3}{5} < 0$, de donde se deduce que en dicho intervalo la gráfica está en la parte inferior de la asíntota horizontal. Ahora veamos cómo es la gráfica en el intervalo $(-2, 2)$, si $x = 0$, entonces $f(0) = \frac{0}{(0)^2-4} = 0$, luego la gráfica pasa por el origen. Para observar si a la derecha del origen la gráfica sube o baja, evaluamos la función en $x = 1$, entonces $f(1) = \frac{1}{(1)^2-4} = \frac{1}{-3} < 0$, luego la gráfica tiende hacia abajo y de la misma forma para ver cuál es el comportamiento a la izquierda del origen, se evalúa la función en $x = -1$, entonces $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2-4} = \frac{-1}{-3} > 0$ esto nos indica que la gráfica tiende hacia arriba.



El rango es:
$R_f = \mathbb{R}$

17) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

$D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.. Observemos que la asíntota horizontal no está definida, dado que al considerar el cociente formado por los coeficientes de la x^2, se tiene que $\frac{1}{0}$ y esta expresión no está definida. Por tal motivo, en este tipo de funciones es conveniente simplificar lo que más sea posible:

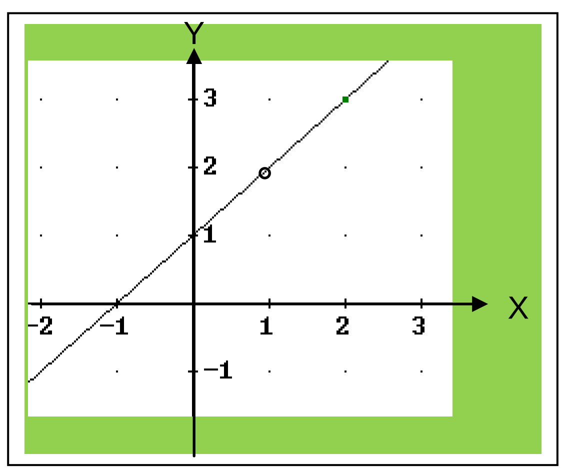
$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el uno, además como se trata de una función lineal, la gráfica es una línea recta y para graficar líneas rectas es suficiente con dos puntos.

	x	$f(x) = x + 1$
♣	1	2
	2	3

El símbolo ♣ significa que el punto indicado no se considera al graficarlo y por lo tanto se representa con una ruedita hueca.

El $R_f = \mathbb{R} - \{2\}$



18) $f(x) = \frac{x^2+2x-8}{x-2}$

$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$. Esta función es del tipo de la anterior, por tal motivo se simplifica:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 8}{x - 2} = \frac{(x+4)(x-2)}{x-2} = x + 4$$

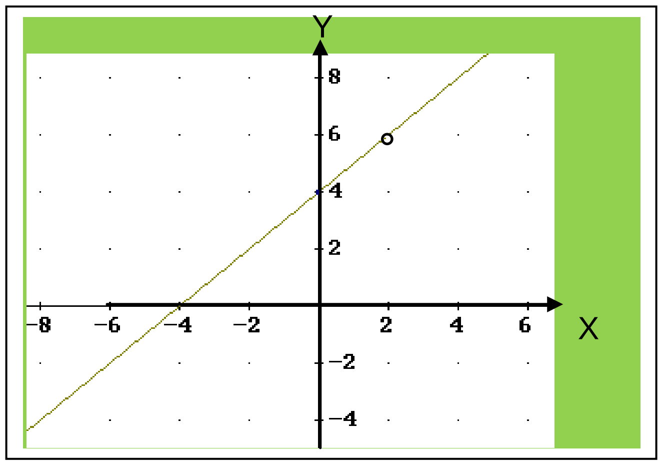
para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el dos, además como se trata de una función lineal, la gráfica es una línea recta y para graficar líneas rectas es suficiente con dos puntos.

x	$f(x) = x + 4$
2	6
0	4

♣

Como el punto (2,4) no se considera, se representa con una ruedita hueco.

El $R_f = \mathbb{R} - \{6\}$

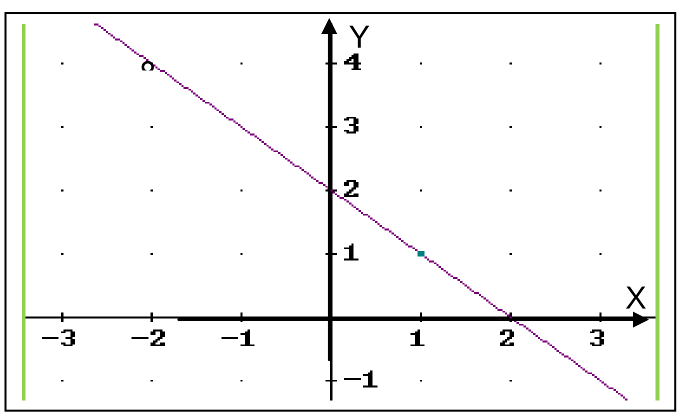


19) $f(x) = \frac{4-x^2}{2+x}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Se simplifica la función:

$$f(x) = \frac{4 - x^2}{2 + x} = \frac{(2-x)(2+x)}{2+x} = 2 - x$$

para graficar esta función a la x se le puede asignar cualquier número real excepto el menos dos.



x	$f(x) = 2 - x$
-2	4
1	1

♣

Como el punto (-2,4) no se considera, se representa con una ruedita hueca.

El $R_f = \mathbb{R} - \{4\}$

20) $f(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+1)}$

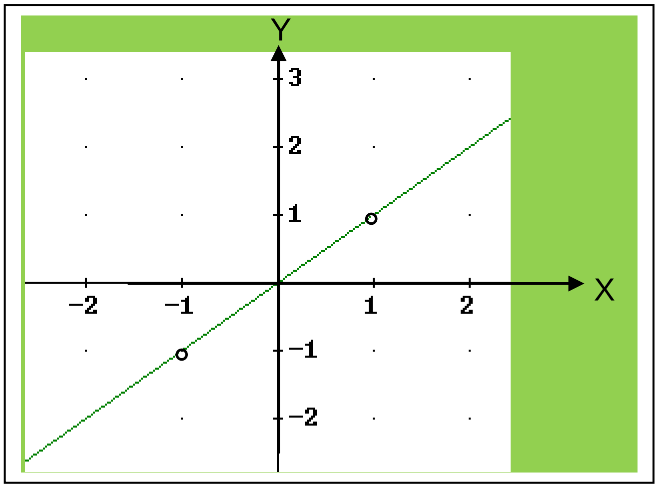
$D_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$. Se simplifica la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x^2-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = x$$

para graficar esta función a la x se le asignan los dos valores cuyos puntos no se consideran sobre la línea recta.

x	$f(x) = x$
-1	-1
1	1

♣



El $R_f = \mathbb{R} - \{-1,1\}$

2.3. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES RACIONALES

Tabla de contenido

En cada uno de los problemas que se dan, de la respuesta a las preguntas planteadas.

1. El número de días que se necesitan para completar un trabajo varía inversamente con el número de hombres que trabajan en él, si lo hacen con igual rapidez.
   a) De una función que modele este problema.
   b) Construya la gráfica considerando que $k = 2$.
   c) Que ocurre cuando el número de hombres aumenta y que sucede cuando el número de hombres disminuye.

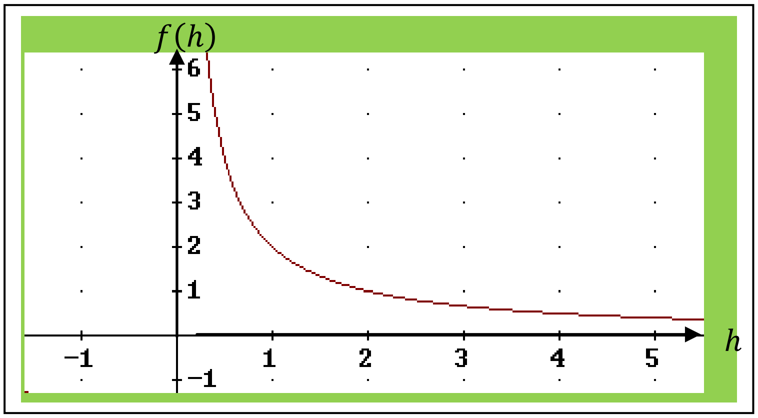
Solución.

a) Supongamos que $f(h)$ representa el número de días para completar un trabajo y que h representa el número de hombres, entonces:

$$f(h) = \frac{k}{h}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Como el número de hombres no puede ser cero ni negativo, entonces el $D_f = (0, +\infty)$.

b) La gráfica de la función es:



c) En la gráfica observamos que cuando el número de hombres aumenta el número de días para completar el trabajo disminuye y que cuando el número de hombres disminuye el número de días aumenta.

2. La base de un triángulo de área constante varía inversamente con su altura.
   a) De una función que modele esta situación.
   b) Construya la gráfica considerando que $k = 3$.

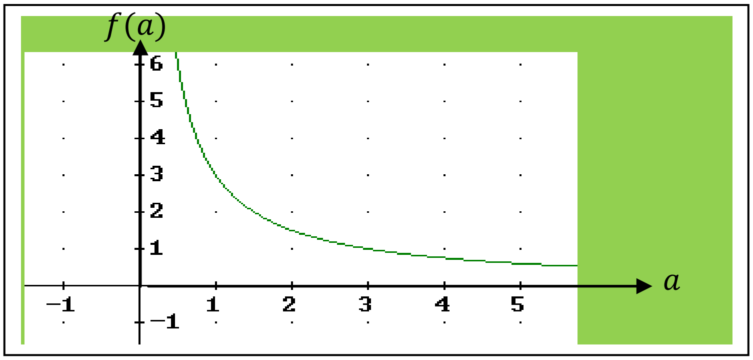
Solución.

a) Supongamos que $f(a)$ represente la base del triángulo y que a representa la altura, entonces:

$$f(a) = \frac{k}{a}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Como la altura no puede ser cero ni negativa, entonces el $D_f = (0, +\infty)$.

b) La gráfica de la función es:



2.4. FUNCIONES CON RADICALES. GRÁFICA, DOMINIO Y RANGO

Tabla de contenido

Las funciones que serán trabajadas son de la forma:

$$f(x) = \sqrt{ax+b} \quad \text{y} \quad f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$$

en donde $a,\ b\ y\ c$ son constantes arbitrarias.

El dominio de la función $f(x) = \sqrt{ax+b}$ se obtiene al darle solución a la desigualdad $ax+b \geq 0$ y el dominio de la función $f(x) = \sqrt{ax^2+bx+c}$ es el intervalo formado por todos los valores que son solución de la desigualdad $ax^2+bx+c \geq 0$. El rango para estas funciones se encuentra después de construir la gráfica.

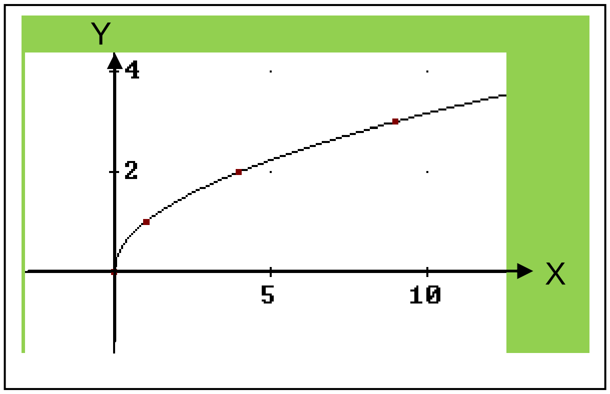
Ejemplos:

Para cada una de las funciones que se dan, obtenga el dominio, construya la gráfica e indique el rango.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ Prát4. F. con Radicales

El dominio de la función son todas las $x \geq 0$, es decir: $D_f = [0, +\infty)$. Para construir la gráfica usamos la tabla que se da:

x	$f(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
4	2
9	3



El $R_f = [0, +\infty)$

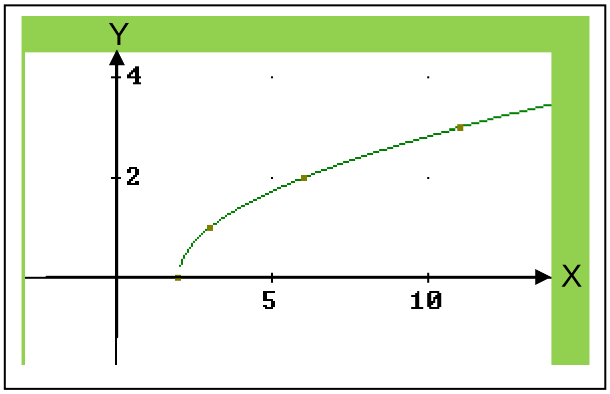
2) $f(x) = \sqrt{x-2}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$x - 2 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq 0$$

luego el $D_f = [2, +\infty)$.

x	$f(x) = \sqrt{x-2}$
2	0
3	1
6	2
11	3



El $R_f = [0, +\infty)$

3) $f(x) = \sqrt{2x+6}$

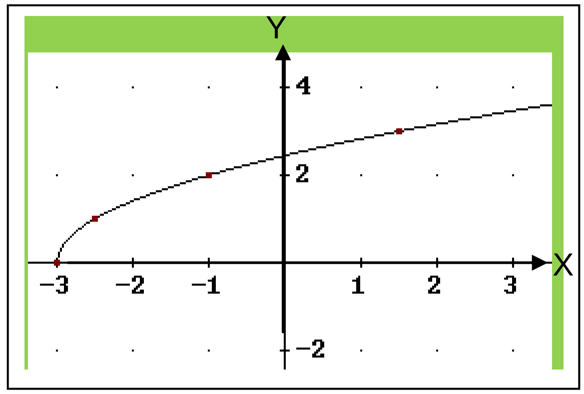
Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$2x + 6 \geq 0$$
$$2x \geq -6$$
$$\frac{2x}{2} \geq \frac{-6}{2}$$
$$x \geq -3$$

luego el $D_f = [-3, +\infty)$.

x	$f(x) = \sqrt{2x+6}$
-3	0
-2.5	1
-1	2
1.5	3

El $R_f = [0, +\infty)$



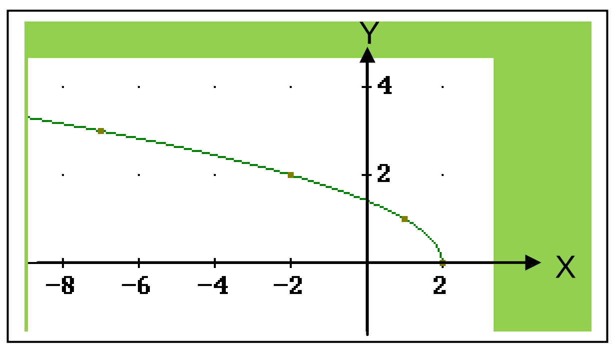
4) $f(x) = \sqrt{2-x}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$2 - x \geq 0$$
$$-x \geq -2$$
$$(-1)(-x) \leq (-1)(-2)$$
$$x \leq 2$$

luego el $D_f = (-\infty, 2]$

x	$f(x) = \sqrt{2-x}$
-7	3
-2	2
1	1
2	0



5) $f(x) = \sqrt{-x}$

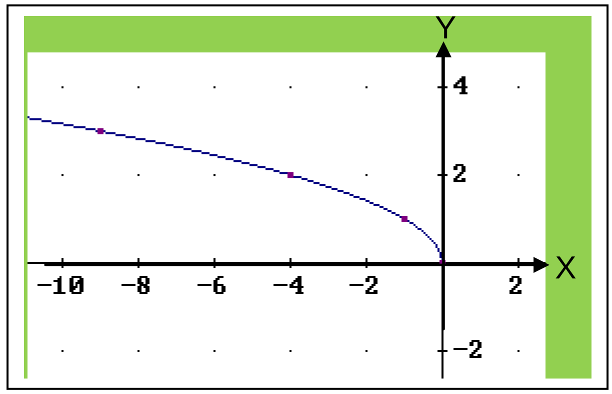
Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$-x \geq 0$$
$$(-1)(-x) \leq (-1)(0)$$
$$x \leq 0$$

luego el $D_f = (-\infty, 0]$

.

x	$f(x) = \sqrt{-x}$
-9	3
-4	2
-1	1
0	0



El $R_f = [0, +\infty)$

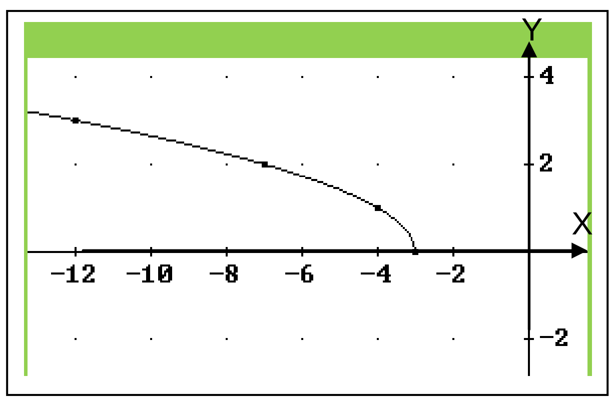
6) $f(x) = \sqrt{-x-3}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$-x - 3 \geq 0$$
$$-x \geq 3$$
$$(-1)(-x) \leq (-1)3$$
$$x \leq -3$$

luego el $D_f = (-\infty, -3]$.

x	$f(x) = \sqrt{-x-3}$
-12	3
-7	2
-4	1
-3	0



El $R_f = [0, +\infty)$

Observemos que los seis ejemplos trabajados son funciones de la forma $f(x) = \sqrt{ax+b}$. En los primeros tres el coeficiente de la x es positiva; es decir, $a > 0$ y en los siguientes tres (4,5 y 6) $a < 0$; es decir, el coeficiente de la x es negativa. Ahora si analizamos las gráficas de este tipo de funciones cuando $a > 0$, nos damos cuenta que las gráficas están orientadas hacia la derecha y cuando $a < 0$ las gráficas están orientadas hacia la izquierda, debe ser claro que en ambos casos las gráficas deben estar contenidas en el intervalo representado por el dominio para cada función.

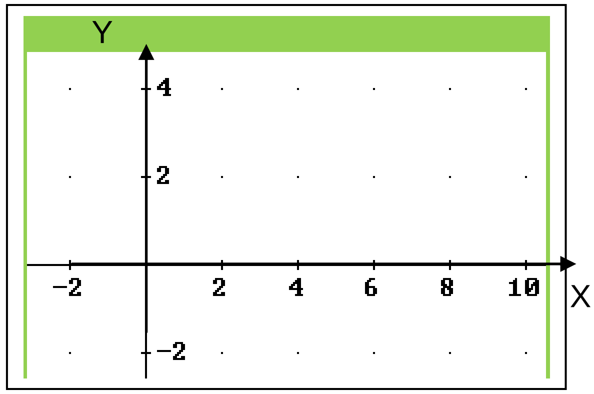
7) Para cada una de las funciones que se indican: obtenga el dominio, construya su gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

a) $f(x) = \sqrt{2x - 5}$

$2x - 5 \geq 0$

El $D_f =$ ___________

El $R_f =$ ___________

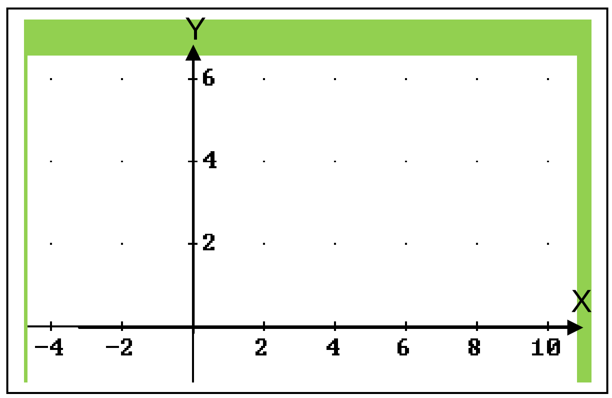


b) $f(x) = \sqrt{3x + 7}$

$3x + 7 \geq 0$

El $D_f =$ ___________

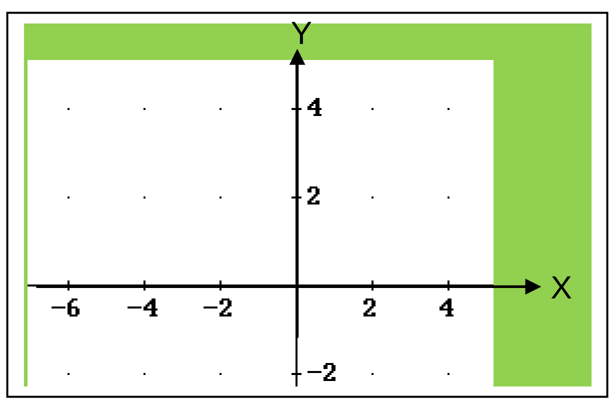
El $R_f =$ ___________



c) $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$

$6 - 2x \geq 0$

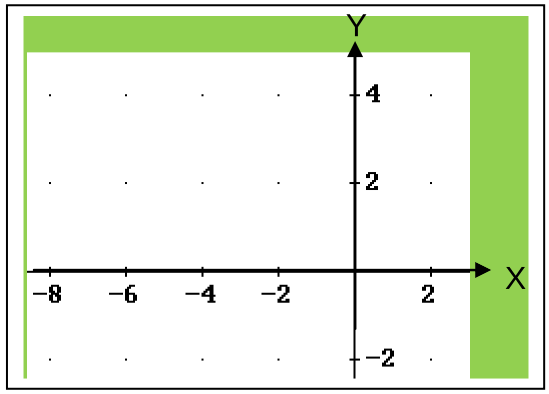
El $D_f =$ ___________



El R_f = ___________

d) $f(x) = \sqrt{-5 - 3x}$

$-5 - 3x \geq 0$



El D_f = ___________

El R_f = ___________

A continuación se darán ejemplos de funciones de la forma

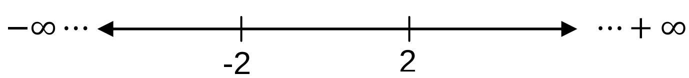
$$f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

8) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ Práct5. F. con Radicales

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$x^2 - 4 \geq 0$$
$$(x-2)(x+2) \geq 0$$
$$x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$
$$x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2$$

los dos valores de la x se grafican sobre la recta real para formar tres intervalos y posteriormente se le dan valores a la x en cada uno de ellos para obtener el signo de la desigualdad en cada intervalo.

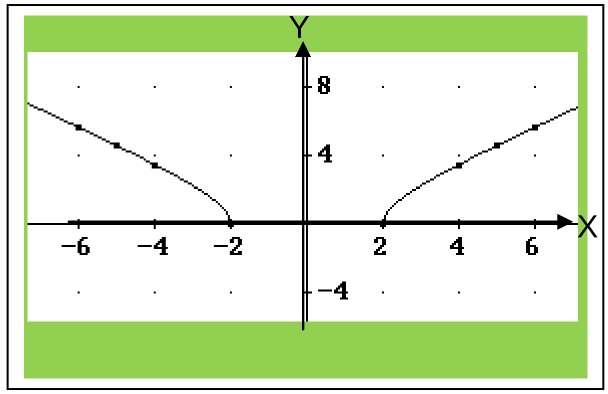


Intervalos	Valores de x	Signo de $(x-2)(x+2)$	
$(-\infty, -2]$	-3	(-)(-)=+	♦
$[-2, 2]$	0	(-)(+)=-	
$[2, +\infty)$	3	(+)(+)=+	♦

Como la desigualdad es mayor o igual a cero, la solución es la unión de los intervalos en donde el signo es positivo y dicha unión es el dominio de la función; es decir:

$$D_{f=}(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$$

x	$f(x)=\sqrt{x^2-4}$
-6	5.6
-5	4.5
-4	3.4
-2	0
2	0
4	3.4
5	4.5
6	5.6



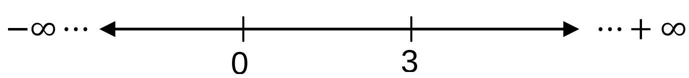
El $R_f = [0,+\infty)$

9) $f(x)=\sqrt{x^2-3x}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$x^2-3x \geq 0$$
$$x(x-3) \geq 0$$
$$x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0$$
$$x-3=0 \quad \Longrightarrow \quad x=3$$

los dos valores de la x se grafican sobre la recta real para formar tres intervalos y posteriormente se le dan valores a la x en cada uno de ellos para obtener el signo de la desigualdad en cada intervalo.

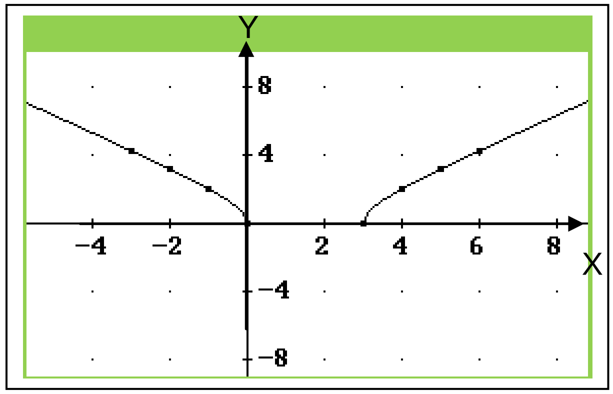


Intervalos	Valores de x	Signo de $x(x-3)$	
$(-\infty,0]$	-1	(-)(-)=+	♦
$[0,3]$	1	(+)(-)=-	
$[3,+\infty)$	4	(+)(+)=+	♦

Como la desigualdad es mayor o igual a cero, la solución es la unión de los intervalos en donde el signo es positivo y dicha unión es el dominio de la función; es decir:

$$D_{f=}(-\infty,0] \cup [3,+\infty)$$

x	$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
-3	4.2
-2	3.1
-1	2
0	0
3	0
4	2
5	3.1
6	4.2



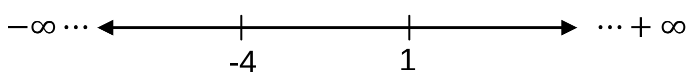
El $R_f = [0, +\infty)$

10) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$x^2 + 3x - 4 \geq 0$$
$$(x+4)(x-1) \geq 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -4$$
$$x - 1 = 0 \;\Longrightarrow\; x = 1$$

los dos valores de la x se grafican sobre la recta real para formar tres intervalos y posteriormente se le dan valores a la x en cada uno de ellos para obtener el signo de la desigualdad en cada intervalo.

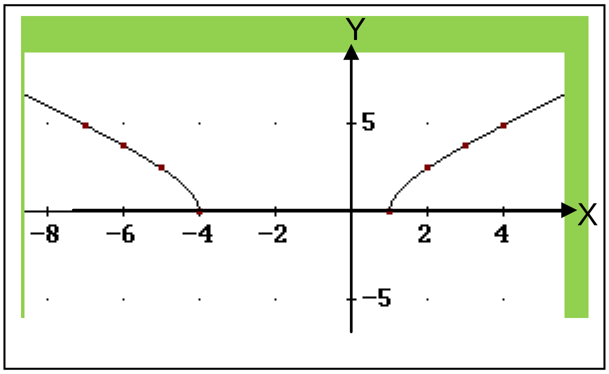


Intervalos	Valores de x	Signo de $(x+4)(x-1)$
$(-\infty, 0]$	-5	(-)(-)=+
$[0, 3]$	0	(+)(-)=-
$[3, +\infty)$	2	(+)(+)=+

Como la desigualdad es mayor o igual a cero, la solución es la unión de los intervalos en donde el signo es positivo y dicha unión es el dominio de la función; es decir:

$$D_{f=}(-\infty, -4] \cup [1, +\infty)$$

x	$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$
-7	4.8
-6	3.7
-5	2.4
-4	0
1	0
2	2.4
3	3.7
4	4.8



El $R_f = [0, +\infty)$

Observemos que en estos tres ejemplos el coeficiente de la x es positivo, es decir: $a \geq 0$, el dominio fue la unión de los intervalos de los extremos y que las gráficas son curvas que se abren hacia los costados.

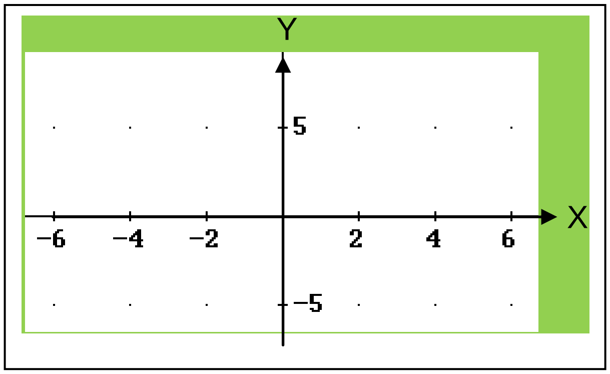
11) En cada una de las funciones que se indican, encuentre el dominio, construya la gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$x^2 - 1 \geq 0$

El $D_f =$ ___________

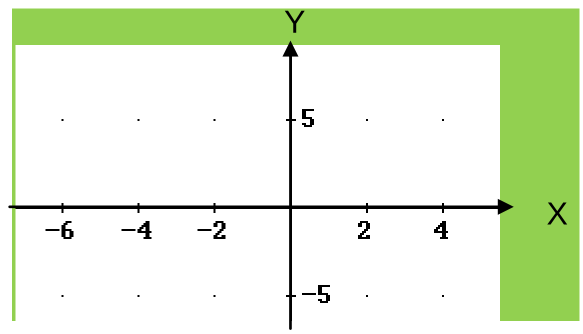
El $R_f =$ ___________



b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$

$x^2 + 2x \geq 0$

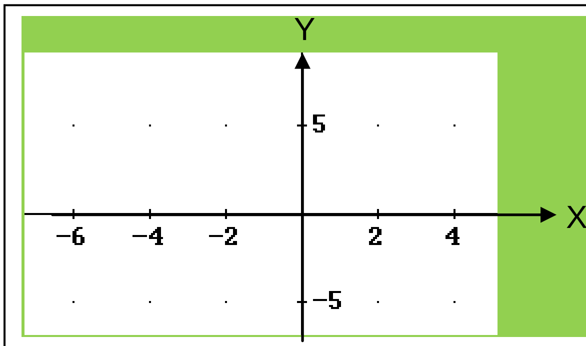
El D_f = ____________
El R_f = ____________



c) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

$x^2 + x - 2 \geq 0$

El D_f = ____________
El R_f = ____________

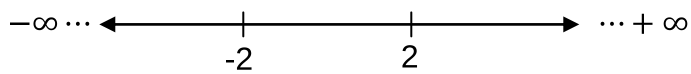


12) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$4 - x^2 \geq 0$$
$$(2 - x)(2 + x) \geq 0$$
$$2 - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$
$$2 + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1$$

los dos valores de la x se grafican sobre la recta real para formar tres intervalos y posteriormente se le dan valores a la x en cada uno de ellos para obtener el signo de la desigualdad en cada intervalo.



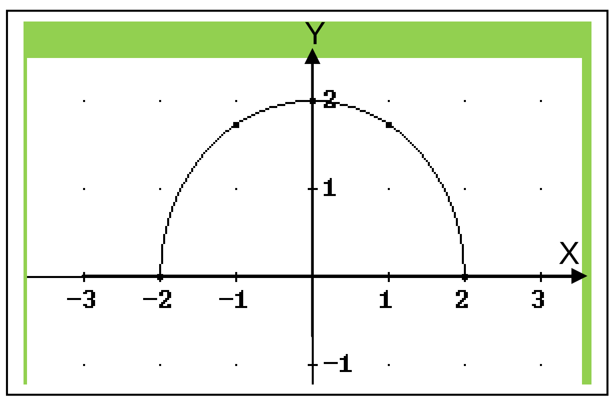
Intervalos	Valores de x	Signo de $(2 - x)(2 + x)$
$(-\infty, -2]$	-3	(+)(-)=-
$[-2, 2]$	0	(+)(+)=+
$[2, +\infty)$	3	(-)(+)=-

Como la desigualdad es mayor o igual a cero, la solución es el intervalo en donde el signo es positivo; es decir:

$$D_f = [-2, 2]$$

x	$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
-2	0
-1	1.7
0	2
1	1.7
2	0

El $R_f = [-2, 2]$



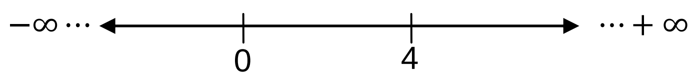
13) $f(x) = \sqrt{4x - x^2}$

Para obtener el dominio de la función se resuelve la desigualdad:

$$4x - x^2 \geq 0$$
$$x(4 - x) \geq 0$$

$$x = 0 \implies x = 0$$
$$4 - x = 0 \implies x = 4$$

los dos valores de la x se grafican sobre la recta real para formar tres intervalos y posteriormente se le dan valores a la x en cada uno de ellos para obtener el signo de la desigualdad en cada intervalo.

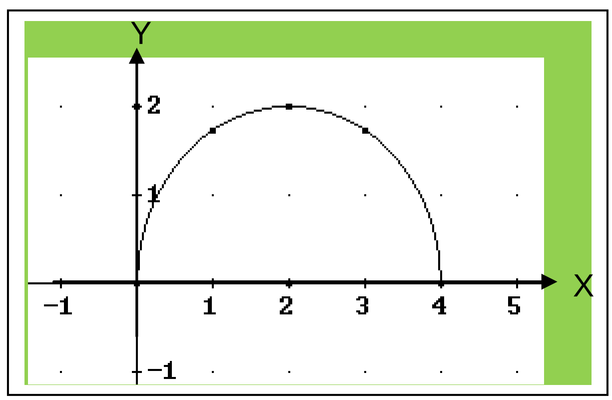


Intervalos	Valores de x	Signo de $x(4-x)$
$(-\infty, 0]$	-1	(-)(+)=-
$[0, 4]$	1	(+)(+)=+
$[4, +\infty)$	5	(+)(-)=-

Como la desigualdad es mayor o igual a cero, la solución es el intervalo en donde el signo es positivo y dicho intervalo es el dominio de la función; es decir: $D_f = [0,4]$.

x	$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$
0	
1	
2	
3	
4	

El $R_f = [0, 4]$



Observemos que en los ejemplos 12 y 13 el coeficiente de la x es positivo, es decir: $a > 0$, que el dominio es el intervalo de en medio y que las gráficas son medias circunferencias.

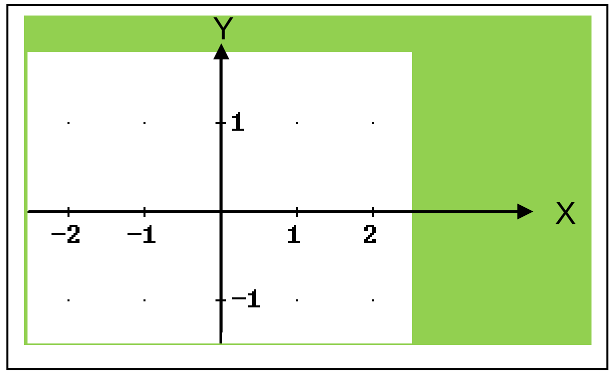
14) En cada una de las funciones que se indican, encuentre el dominio, construya la gráfica sin darle valores a la x y diga cuál es el rango.

a) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$1 - x^2 \geq 0$

El D_f = ____________

El R_f = ____________

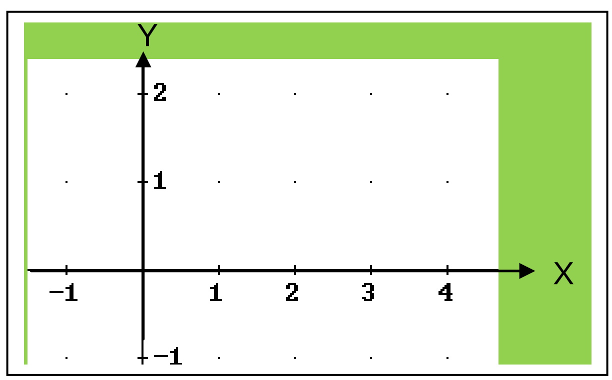


b) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

$3x - x^2 \geq 0$

El D_f = ____________

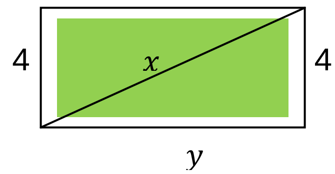
El R_f = ____________



2.5. APLICACIONES DE LAS FUNCIONES CON RADICALES

Tabla de contenido

1) Supóngase que se tiene un terreno rectangular cuyo ancho mide 4 metros, el largo mide y metros y que una de sus diagonales mide x metros.



a) Represente a la y en términos de la x o como una función de x. ¿Cuál es su dominio?
b) Construya la gráfica.
c) Si $x = 10m$. Obtenga la medida de $y = f(x)$.

Solución.

a) Por el teorema de Pitágoras

$$y^2 + 4^2 = x^2$$
$$y^2 = x^2 - 4^2$$

$$y = \sqrt{x^2 - 16}$$

y si $y = f(x)$, entonces la función es:

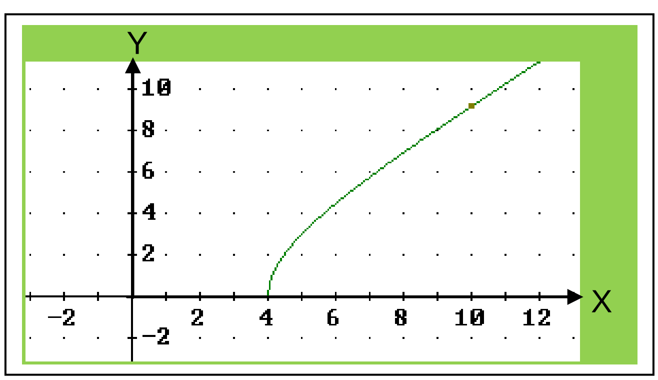
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$$

al resolver la desigualdad $x^2 - 16 \geq 0$, se obtiene que la solución es:

$$x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

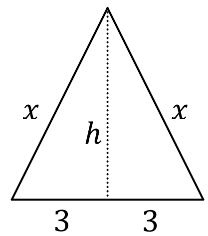
pero como x no puede tomar valores negativos el $D_f = [4, +\infty)$.

b) La gráfica es:



c) $y = f(10) = \sqrt{10^2 - 16} = \sqrt{100 - 16} = \sqrt{84} = 9.1m$

2) Si se tiene un triángulo isósceles en el que sus lados iguales miden x cm y su tercer lado mide 6cm.



a) Represente a la h como una función de x. ¿Cuál es su dominio?
b) Construya la gráfica.
c) Si $x = 8cm$. Obtenga la medida de $h = f(x)$.

Solución.

b) Por el teorema de Pitágoras

$$h^2 + 3^2 = x^2$$
$$h^2 = x^2 - 3^2$$
$$h = \sqrt{x^2 - 9}$$

y si $h = f(x)$,, entonces la función es:

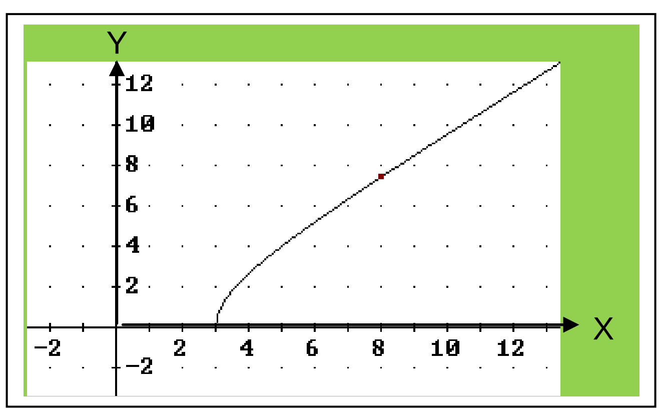
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

al resolver la desigualdad $x^2 - 9 \geq 0$, se obtiene que la solución es:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

pero como x no puede tomar valores negativos el $D_f = [3, +\infty)$.

b) La gráfica es:



c) $h = f(8) = \sqrt{8^2 - 9} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{55} = 7.41m$

2.6. EJERCICIOS

Tabla de contenido

Prác3. F. Racionales

I) Para cada una de las funciones racionales que se dan: indique el dominio, construya la gráfica y diga cuál es el rango.

1)$f(x) = \frac{1}{x-4}$	2) $f(x) = \frac{2}{x+4}$	3) $f(x) = \frac{-3}{2x-3}$
4) $f(x) = \frac{1}{x-4} + 2$	5) $f(x) = \frac{2}{x+4} - 1$	6) $f(x) = \frac{-3}{2x-3} - 2$
7) $f(x) = \frac{5}{5-2x}$	8) $f(x) = \frac{5}{5-2x} + 3$	9) $f(x) = \frac{3}{7-3x}$
10) $f(x) = \frac{3}{7-3x} - 2$	11) $f(x) = \frac{x}{x+1}$	12) $f(x) = \frac{x}{1-x}$
13) $f(x) = \frac{2x}{7-2x}$	14) $f(x) = \frac{3x}{3x-4}$	15) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
16) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$	17) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-9}$	18) $f(x) = \frac{3x^2}{1-x^2}$
19) $f(x) = \frac{2x^2}{4-x^2}$	20) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$	21) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$
22) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x+1}$	23) $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$	24) $f(x) = \frac{3x-x^2}{3-x}$
25) $f(x) = \frac{x^2+3x-10}{x+5}$	26) $f(x) = \frac{x^3-4x}{x(x+2)}$	27$(x) = \frac{x^3+4x^2-5x}{x(x-1)}$

II) Para cada una de las funciones con radicales que se dan: indique el dominio, construya la gráfica y diga cuál es el rango

Práct6. F. con Radicales

1) $f(x) = \sqrt{2x-8}$	2) $f(x) = -\sqrt{2x-8}$	3) $f(x) = \sqrt{2x-8} + 3$
4) $f(x) = \sqrt{5x+10}$	5) $f(x) = \sqrt{5x+10} - 2$	6) $f(x) = -\sqrt{5x+10}$
7) $f(x) = \sqrt{1-x}$	8) $f(x) = \sqrt{1-x} + 4$	9) $f(x) = -\sqrt{1-x}$
10) $f(x) = \sqrt{5-6x}$	11) $f(x) = \sqrt{3x+7}$	12) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
13) $f(x) = -\sqrt{x^2-9}$	14) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + 2$	15) $f(x) = \sqrt{x^2-16}$
16) $f(x) = \sqrt{x^2-16} + 3$	17) $f(x) = -\sqrt{x^2-16}$	18) $f(x) = \sqrt{x^2+3x}$

19) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$ 20) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10}$ 21 $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

22) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ 23) $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$ 24) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

25) $f(x) = \sqrt{7x - x^2}$ 26) $f(x) = \sqrt{8x - x^2}$

III) De la respuesta a lo que se pide en cada problema

1) El volumen de un gas a temperatura constante varía inversamente con su presión.
    a) Represente el volumen en función de la presión e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

2) La presión es inversamente proporcional a la altura.
    a) Represente la presión en función de la altura e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

3) La temperatura a la que hierve el agua varía inversamente con el número de metros sobre el nivel del mar.
    a) Represente la temperatura en función del número de metros sobre el nivel del mar e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

4) El monto de capital necesario para producir un ingreso dado varía inversamente con la tasa de interés.
    a) Represente el monto del capital en función de la tasa de interés e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

5) La fuerza necesaria para levantar una roca varía inversamente con la longitud de la palanca usada.
    a) Represente la fuerza en función de la longitud de la palanca e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

6) La iluminación de un objeto varía inversamente con el cuadrado de la distancia de la fuente luminosa al objeto.
    a) Represente la iluminación en función de la distancia de la fuente de luminosidad e indique el dominio.
    b) Construya la gráfica, suponga que $k = 1$.

7) El volumen de un gas varía directamente con la temperatura e inversamente con la presión. Represente el volumen en función de la temperatura y de la presión.

8) La resistencia eléctrica de un cable varía directamente con su longitud e inversamente con el cuadrado de su diámetro. Represente la resistencia en función de la longitud y del diámetro.

9) La ley de gravitación de Newton dice que dos objetos con masas m_1 y m_2 se atraen entre sí con una fuerza que es conjuntamente proporcional a sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los objetos. Represente la fuerza en función de la masa y de la distancia.

10) La población de conejos de una granja se comporta de acuerdo a la fórmula

$$f(t) = \frac{30000t}{t+1}$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en meses) desde el principio del año.

a) Trace la gráfica de la población de conejos.
b) ¿Qué pasa finalmente con la población de conejos?

11) Después de inyectar cierto medicamento a un paciente, se supervisa la concentración f de una droga en la sangre. En el momento $t \geq 0$ (en minutos desde el momento de la inyección), la concentración (en mg/l) está dada por la función

$$f(t) = \frac{30t}{t^2+2}$$

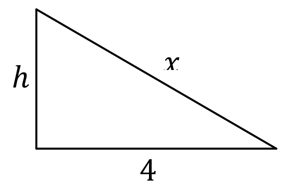
a) Trace la gráfica de la concentración de la medicina
b) ¿Qué ocurre finalmente con la concentración de la medicina en la sangre?

12) A un paciente se le administra una medicina y se monitorea la concentración de la misma en la corriente sanguínea. En el momento $t \geq 0$ (en horas desde la administración de la droga), la concentración (mg/l) está dada por la fórmula

$$f(t) = \frac{5t}{t^2+1}$$

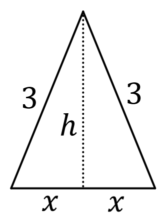
a) Trace la gráfica de la función.
b) ¿Cuál es la concentración de la medicina más elevada alcanzada en la corriente sanguínea del paciente aproximadamente? (use la gráfica)
c) ¿Qué le ocurre a la concentración de la medicina después de un largo periodo?

13) Dado el triángulo rectángulo



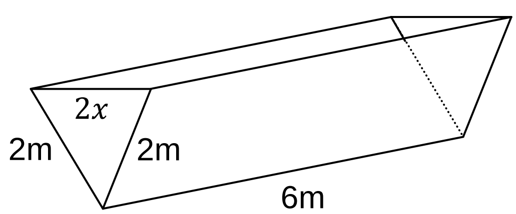
a) Exprese el área en función de la x. ¿Cuál es el dominio?
b) Trace la gráfica.
c) ¿Cuál es el área cuando $x = 6$?

14) Dado el triángulo isósceles



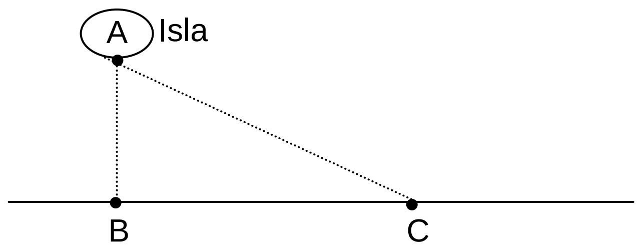
a) Exprese el área en términos de la x. ¿Cuál es el dominio?
b) Trace la gráfica.
c) ¿El área máxima supera las $5u^2$? (Use la gráfica).

15) Un abrevadero tiene sus extremos en forma de triángulo isósceles. La anchura de su parte superior mide $2x$, los lados iguales miden 2 metros y el largo mide 6 metros.



a) Exprese el volumen en términos de la x. ¿Cuál es el dominio de la función que se obtiene?
b) Construya la gráfica.
c) Obtenga el volumen cuando $x = 1m$

16) Una isla (representada por A) se encuentra a 5km de la playa y la distancia del punto B al punto C (como se indica en la figura) es xx. Si una persona en una lancha rema a 3km por hora.



a) Represente el tiempo que dura la persona en recorrer la distancia de A a C en términos de x. ¿Cuál es el dominio de la función que se obtiene?
b) Construya la gráfica.
c) Obtenga el tiempo cuando $x = 1km$