La función inversa de una función

Ejemplo 9

Considera el siguiente conjunto de parejas ordenadas correspondientes a una relación:

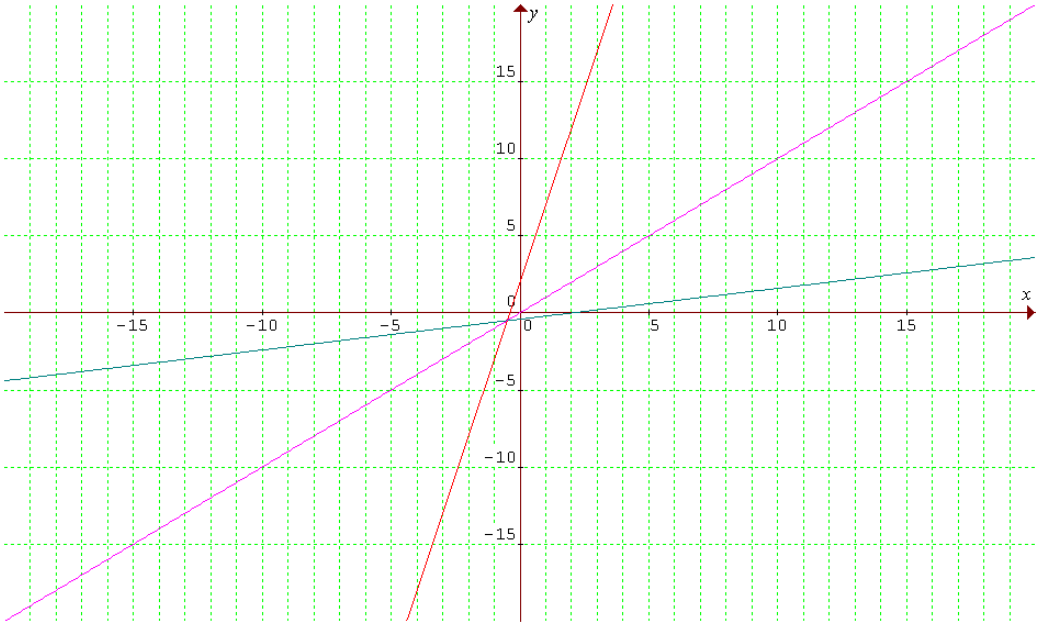
$$\{(-3,-13),(-2,-8),(-1,-3),(0,2),(1,7),(2,12),(3,17)\}$$

Intercambia los elementos de cada pareja ordenada y completa:

$$\{(-13,-3),(-8,-2),(-3,-1),(2,0),(7,1),(12,2),(17,3)\}$$

Conviene que los alumnos ubiquen en una misma gráfica los puntos de la primera relación unidos, los puntos de la segunda relación también unidos y la recta $y = x$

¿Qué observan?



Puntualiza que los puntos de la primera relación son simétricos a los de la segunda relación con respecto a la recta $y = x$

¿Cómo será la ecuación correspondiente a la primera relación?

Exacto $y = 5x + 2$

¿Y la ecuación correspondiente a la segunda relación?

$$y = \frac{x-2}{5}$$

Cuestiona a los alumnos ¿cómo obtener esas ecuaciones?

Para la primera relación y observando las parejas ordenadas podremos apreciar que si al primer elemento de la pareja lo multiplicamos por 5 y al resultado le sumamos 2 unidades, obtenemos el segundo elemento de la pareja.

Por ejemplo si $x = 2$, este número lo multiplico por 5 nos resulta 10 y a éste último le sumo 2, obtengo el número 12. Por lo tanto la pareja es ($2, 12$).

Prueba hacerlo con las otras parejas.

Muy bien!!

Ahora, ¿cómo obtenemos la ecuación correspondiente a la segunda relación?

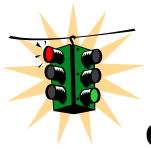
Si teníamos $y = 5x + 2$, intercambiando la x con la y tendremos $x = 5y + 2$.

Despejamos a y de esta última ecuación

$x - 2 = 5y$; $\frac{x-2}{5} = y$ por lo que $y = \frac{x-2}{5}$

Si las consideramos como funciones, que de hecho eso representan, tendremos una función $f(x) = 5x + 2$ y la función $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$

Estas dos ecuaciones se conocen como funciones inversas, una es inversa de la otra y viceversa.



Conceptos clave

3. El intercambio de x con y en la ecuación correspondiente a una relación entre dos conjuntos de números, da lugar a una ecuación de la relación inversa.

4. Las gráficas de una relación y de su inversa son siempre simétricas respecto a la recta $y = x$.

5. Todas las funciones tienen inversa, pero la inversa no es necesariamente una función.

6. Si f y f^{-1} son funciones inversas, el dominio de f es el rango de f^{-1} y el rango de f es el dominio de f^{-1}

Ejemplo 10

Consideramos ahora una función representada por $y = x^2 + 3$, con dominio los reales mayores o iguales a cero.

Algunas parejas de esta función son $(0,3),(1,4),(2,7),(3,12),(4,19),(5,28)$

Si intercambiamos las x con las y obtendremos una relación inversa de acuerdo al **concepto clave 3**, $x = y^2 + 3$

Si despejamos nuevamente y de esta última expresión, tendremos $y = +\sqrt{x-3}$

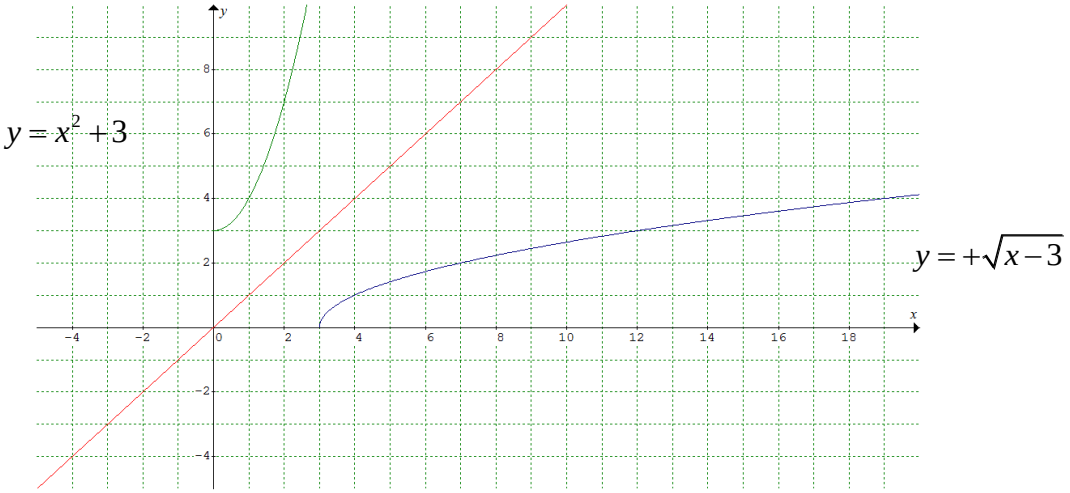
Al menos 6 parejas correspondientes a esta función son:

$(3,0),4,1),(5,\sqrt{2}),(7,2),(12,3),(19,4)$

¿El dominio de la primera función es el rango de la segunda función?

Sí, efectivamente.

Construyendo sus gráficas, éstas deberían verse como se muestra enseguida.



Ejemplo 11

Considera la función f escrita como $y = \dfrac{1}{x+2}$**,** observa que $x \neq -2$

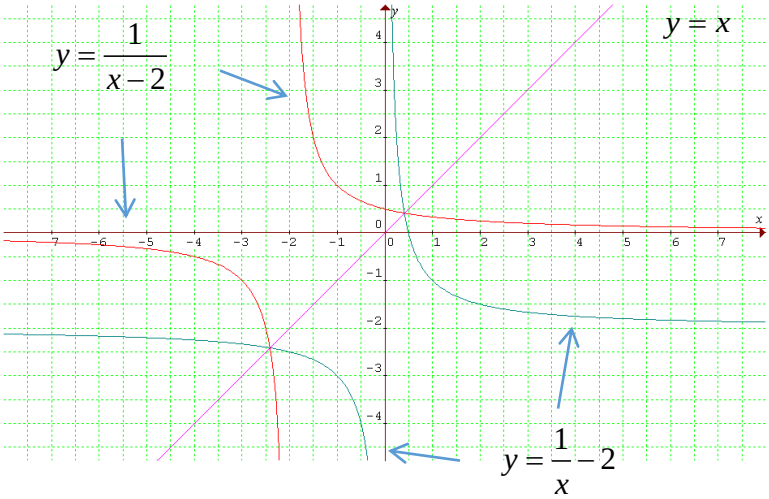
Algunas parejas ordenadas que corresponden a esta función son:

$$\left(-6, -\frac{1}{4}\right), \left(-5, -\frac{1}{3}\right), \left(-4, -\frac{1}{2}\right), (-3, -1), (-1, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Obtén la función inversa correspondiente.

Verifica con tus alumnos que algunos puntos de la gráfica de la función inversa, de acuerdo al ***concepto clave 6****, sean:*

$$(-\frac{1}{4}, -6), (-\frac{1}{3}, -5), (-\frac{1}{2}, -4), (-1, -3), (1, -1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{3}, 1), (\frac{1}{4}, 2)$$

La inversa de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$ es la función $f^{-1}(x) = y = \dfrac{1}{x} - 2$

La gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, su inversa $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x}-2$ y la recta $y=x$ se pueden apreciar enseguida