LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sugerencia para quien imparte el curso:

Es conveniente recordar a los alumnos, alguno de los ejercicios anteriores, por ejemplo el 4.1 en el que calculamos cómo crece la deuda de Enrique, que solicitó un préstamo al banco de $ 6,500 con un interés compuesto. Si ahora se cuestiona en cuánto tempo se duplicará o se triplicará la deuda.

Como el capital inicial que solicitó fueron $ 6,500 entonces deberían resolverse las siguientes ecuaciones:

$13{,}000 = 6{,}500(1.01)^t$ o bien

$18{,}500 = 6{,}500(1.01)^t$

Como se puede observar, la incógnita t aparece en el exponente de ambas ecuaciones. Quizá los alumnos no habían enfrentado la solución de una ecuación de este tipo. Una ecuación similar, pero un poco más sencilla es

$$5^x = 4310$$

Para resolver ambas ecuaciones se debe despejar la incógnita, eso lo haremos con esta nueva operación: el logaritmo de un número.

Por el momento dejamos pendiente la solución de ambas ecuaciones para conocer antes qué son los logaritmos y de qué manera se emplean.

Continuando con el concepto de función inversa, considera las expresiones siguientes, comprueba y completa donde es necesario.

$10^1 = 10$

$10^{0.5} = 3.1622776$

$10^2 = 100$

$10^{4.32} = 20892.961$

$10^6 =$ _____

$10^8 =$ _____

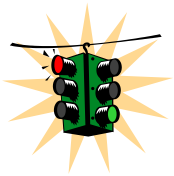
$10^{2.23} =$ _____

Observa bien que en cada expresión el *1, 0.5, 2, 3, 5.8, 8, 2.23* corresponden a exponentes pero la base es el número 10.

Observamos en los resultados anteriores que 1 es el exponente al que hay que elevar la base 10 para obtener 10.

De modo similar, 0.5 es el exponente al que hay que elevar la base 10 para obtener 3.1622776; 2 el exponente al que hay que elevar el 10 para obtener el 100; 5.8 el exponente al que hay que elevar el 10 para obtener 630957.3445, etc.

Arribamos ahora a nuevos conceptos:



Conceptos clave

7. El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar la base para obtener ese número.

8. La función exponencial y la función logarítmica, son funciones inversas

9. La función inversa de $f(x)=10^x$ es $f(x)=\log_{10} x$

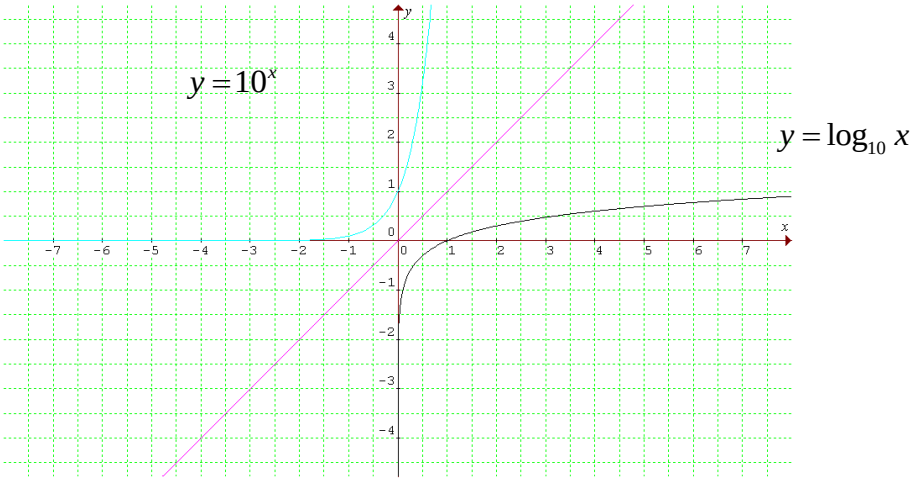
10. La función inversa de $f(x)=e^x$ es $f(x)=\ln x$

Considerando el **concepto clave 7** podremos afirmar que 2 es el logaritmo de 100, base 10; 3 es el logaritmo de 1000, base 10; 8 es el logaritmo de 100000000, base 10, etc.

En general si escribimos la función exponencial $f(x)=y=10^x$ e intercambiamos x con y obtendríamos $x=10^y$, y si despejamos de esta última expresión la y, obtendremos $y=\log_{10} x$, de acuerdo a los **conceptos clave 3, 6 y 7**.

Estamos afirmando que las funciones $y=10^x$ y $y=\log_{10} x$ son funciones inversas.

Observemos sus gráficas para establecerlo correctamente de acuerdo al **concepto clave 4** y confirmémoslo con el **concepto clave 6**.



De modo similar observemos la tabla siguiente:

x	0.3	0.5	1	1.25	1.76	2.12	3.46	4
$f(x) = e^x$	1.34985	1.648721	2.718281	3.49034	5.81243	8.33113	31.81697	54.5981

Podemos afirmar que 0.3 es el exponente al que se eleva el número e para obtener 1.3498; 0.5 el exponente al que se eleva el número e para obtener 1.6487, etc.

De acuerdo al concepto clave 7

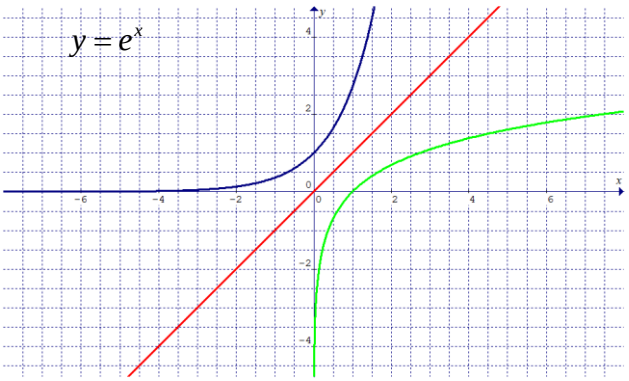
$ln(1.3498588) = 0.3$

$ln(1.6487212) = 0.5$ **etc.**

$ln(3.4903429) = 1.25$

Se puede afirmar que la función exponencial $f(x) = e^x$ y la función logaritmo natural $f(x) = \ln x$ son también funciones inversas.

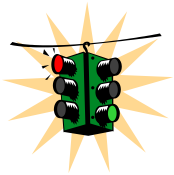
Podemos apreciar sus gráficas enseguida.



$y = \ln x$

Los logaritmos de base 10 que fueron escritos simplemente como $log\ 100$, se denominan logaritmos comunes o vulgares; y a los logaritmos de base el número e, escritos $ln\ 5$, se les denomina logaritmos naturales.

También se pueden manejar logaritmos en otras bases diferentes del 10 y del número e, en ese caso no reciben un nombre especial



Conceptos clave

Propiedades de los logaritmos

De acuerdo al concepto clave 7, como se ha definido el logaritmo de un número en cualquier base, los logaritmos cumplen con las reglas de los exponentes, por consiguiente:

11. El logaritmo de la base es siempre igual a uno

$$\log_a(a) = 1 \text{ pues } a^1 = a$$

12. El logaritmo del producto de dos números es igual a la suma de los logaritmos de los números.

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

13. El logaritmo de la potencia de un número es igual a la potencia multiplicada por el logaritmo del número.

$$\log(a^n) = n\log(a)$$

Esta propiedad se aplica también si la potencia es fraccionaria como

$$\log(\sqrt[n]{a^m}) = \log(a^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}\log(a)$$

14. El logaritmo del cociente de dos números es igual a la diferencia de los logaritmos de los números.

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

15. El logaritmo de uno es cero

16. El dominio de la función logarítmica corresponde a los números reales positivos

Sugerencia para quien imparte el curso:

Es conveniente que los alumnos resuelvan por su parte los ejercicios siguientes, realizando operaciones con su calculadora directamente y posteriormente aplicando las propiedades de logaritmos como en el ejemplo 4.13 y 4.14.

Ejercicios

Obtener el valor de las expresiones siguientes

a) $A = log(3256)(53.1825)$

b) $B = ln(4356)(5.831825) =$

c) $C = log(54)^{\frac{1}{4}} =$

d) $D = log\left(\frac{1239.6578}{4892}\right) =$

Uso de los logaritmos

Aplicando logaritmos se pueden simplificar algunas operaciones que de momento parecen muy complicadas.

Ejemplo 13

Obtener el valor de $E = \dfrac{(25.43)^7 \bullet \sqrt[5]{197}}{0.386^3}$

Aplicamos logaritmos a ambos miembros de la igualdad y enseguida las propiedades de los logaritmos

$$\log E = \log(25.43)^7 + \log(\sqrt[5]{197}) - \log(0.386)^3 =$$

$$\log E = 7\log(25.43) + \tfrac{1}{5}\log(197) - 3\log(0.386)$$

$$= 7(1.40534636) + \tfrac{1}{5}(2.294466226) - 3(-0.4134156953)$$

$$= 9.83742452 + 0.458893245 + 1.24023808$$

$$\log E = 11.53655585$$

Para obtener finalmente el valor de E, aplicamos la función inversa 10^x

Obteniendo, $E = 3.439979465 \times 10^{11}$

Ejemplo 4.14

Obtener el valor de $F = \dfrac{\sqrt[4]{86.71}}{\sqrt[5]{3245}}$ aplicando logaritmos naturales

Completa donde es necesario

$$\ln F = _____ - _____$$

Comprueba que el resultado de F es

$$F = 0.605723405$$

Hacer notar a los alumnos que es indistinto aplicar logaritmos comunes o naturales.

Ejercicio 7

Aplica logaritmos, de la base que desees, para obtener los valores de las operaciones siguientes:

1. $\sqrt[4]{5398} \bullet (213.46)^3 =$

2. $\sqrt{\dfrac{934.86^5}{5962^3}} =$

3. $\sqrt[5]{583(6791)} =$

4. $\dfrac{\sqrt[7]{47.2}}{\sqrt[5]{39.50}} =$