Concepto clave

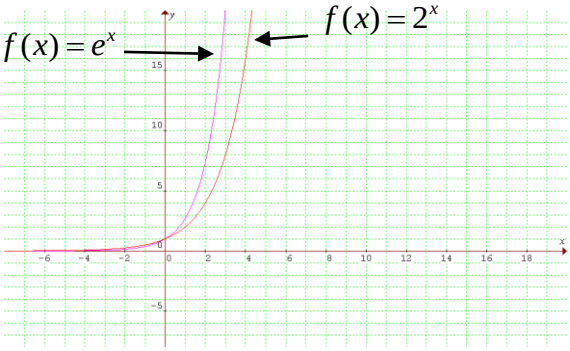
2. La función exponencial natural

En los ejercicios anteriores has trabajado con la función exponencial $f(x) = c\,a^x$, en la cual c es una constante y a es cualquier cantidad mayor que uno o mayor que cero y menor que uno.

Si has observado bien, en los casos que te hemos presentado el crecimiento o decrecimiento no se da en forma continua. Por ejemplo, el aumento del capital invertido se da cada mes o cada 3 o 12 meses. La eliminación de medicamentos en la sangre también se calcula en períodos de un día o una semana.

Sin embargo, si el crecimiento o decrecimiento de una cantidad o población ocurre continuamente sin interrupción, habrá que utilizar la **función exponencial natural** $f(x) = e^x$. Ésta es llamada así pues fue obtenida en la investigación de fenómenos físicos naturales.

Enseguida se muestran comparativamente las gráficas de la función $f(x) = a^x$, con $a = 2$ y de la función $f(x) = e^x$.



El número e que es la base de la función exponencial $f(x) = e^x$, se obtiene haciendo el desarrollo de $C(n) = (1 + \frac{1}{n})^n$. De hecho puede decirse que el límite de esa expresión cuando n tiende a infinito es el número e.

En la siguiente tabla se muestra parte del desarrollo de esta función para diferentes valores de n:

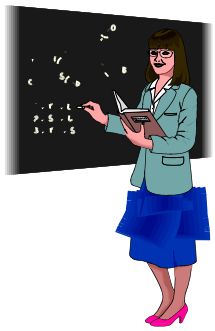
N	$\frac{1}{n}$	$1+\frac{1}{n}$	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	1	2	2
10	0.1	1.1	2.59374246
100	0.01	1.01	2.704813829
1000	0.001	1.001	2.716923932
10000	0.0001	1.0001	2.718145927
100000	0.00001	1.00001	2.718268237
1000000	0.000001	1.000001	2.718280469
10000000	0.0000001	1.0000001	2.718281693
1000000000	0.00000001	1.00000001	2.718281815
10000000000	0.000000001	1.000000001	2.718281827
100000000000	0.0000000001	1.0000000001	2.718281828

Crecimiento Poblacional

Un modelo matemático que describe el crecimiento o decrecimiento de una población está dado por: $N(t) = N_0 e^{kt}$ ……. (3)

Donde, $N(t)$ es el número de elementos de la población al cabo de cierto tiempo t.

k es una constante que es positiva si hay crecimiento de la población o negativa si la población decrece.



Ejemplo 4

Una población de bacterias contiene inicialmente 350 y crece a razón de 36.55% diariamente, ($k = 0.3655$). Si prevalecen las mismas condiciones ¿cuál será el número de bacterias al día siguiente, a los $3, 5, 7, 8, 10, 15$ y 21 días?

Solución:

De acuerdo a la expresión señalada anteriormente y sustituyendo en ella los valores que proporciona el ejemplo, la expresión para calcular el número de bacterias será: $N(t) = 350\,e^{0.3655t}$

Al cabo de un día habrá $N(1) = 350\,e^{0.3655(1)}$ =_____ bacterias.

Las cantidades que aparecen en las respuestas están redondeadas y por eso aparece el símbolo $\approx$ en lugar del $=$.

Al cabo de 3 días habrá $N(3) = 350\,e^{0.3655(3)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 5 días habrá $N(5) = 350\,e^{0.3655(5)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 7 días habrá $N(7) = 350\,e^{0.3655(7)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 8 días habrá $N(8) = 350\,e^{0.3655(8)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 10 días habrá $N(10) = 350\,e^{0.3655(10)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 15 días habrá $N(15) = 350\,e^{0.3655(15)}$ =_____ bacterias.

Al cabo de 21 días habrá $N(21) = 350\,e^{0.3655(21)}$ =_____ bacterias.

Ejemplo 5

Si en 1980 la población mundial era de 4,432,682,000 (4.43 miles de millones) de habitantes y la tasa de crecimiento (el porcentaje como crece), era de 1.74% anual. Suponiendo que la población continuara creciendo al mismo ritmo de forma exponencial, ¿cuántos habitantes habría en 1985, 1990, 1995, 2000, 2005, 2010, 2015? Compara tus resultados con la población mundial actual.

Solución:

¿Cuál será la expresión con la que podemos determinar la población mundial?_____

Exacto $N(t) = 4.43e^{0.0174t}$

¿Cuál será la población en 1985?

Para 1985 habrán transcurrido 5 años, entonces habrá:

$N(5) = 4.43e^{0.0174(5)} = 4.8326722$ miles de millones de habitantes

¿Y la población en 1990?

Para 1990 habrán transcurrido 10 años, se puede obtener el resultado empleando la misma expresión $N(t) = 4.43e^{0.0174t}$

De la misma manera se puede hacer los cálculos para los años 1995 y 2000.

Para el año 2005 la población sería de 6.8441863 miles de millones de habitantes

Nota: la población mundial en 2010 fue de $6\ 972\ 688\ 217$ habitantes, de acuerdo a la página web *http:/es.wikipedia.org/wiki/población_mundial***.** Esto significa que nuestros cálculos están bastante cercanos.

Continuando con éste mismo modelo para el año 2012 la población mundial sería de 7.730701809 miles de millones de habitantes y para el año 2018 sería de:

8.581421571 miles de millones de habitantes.

Sugerencia para quien imparte el curso:

Es conveniente que los alumnos realicen todas las operaciones por su cuenta y solamente confronten sus resultados con el Profesor.

Ejercicio 3

1. El Estado de Querétaro es una entidad federativa con una tasa promedio de crecimiento poblacional anual del 2.7% entre los años 2000 y 2010, de acuerdo a la página web del INEGI. De acuerdo a esos datos y suponiendo que las condiciones no cambiaran, ¿cuál sería la población de esa entidad en este año 2015, en el 2018, en el 2022 y en el 2027?

2. La población Mexicana en el año 2005 era de 103,263,388 de habitantes y se estimaba entonces un crecimiento exponencial de 1% anual, de acuerdo a la página web del INEGI, pero actualmente, la tasa de crecimiento promedio anual es del 1.8% ¿cuál será la población Mexicana en el año 2017, el 2021 y el 2025, si continuaran las mismas condiciones de crecimiento?

Eliminación de medicamentos

En muchos de los casos donde se ingieren medicamentos, La cantidad $A(t)$ de medicamento que permanece en la corriente sanguínea disminuirá de acuerdo a la expresión $A(t) = A_0\, e^{kt}$, donde A_0 es la cantidad inicial de medicamento y k es una constante que debe ser negativa. Observa que esta expresión es prácticamente igual a la expresión (3) $N(t) = N_0 e^{kt}$.

Ejemplo 6

Supongamos que se utiliza un somnífero para anestesiar una oveja. La oveja queda anestesiada cuando la concentración de ese somnífero en su corriente sanguínea es de por lo menos 40 mg. de la sustancia anestésica por kilogramo de

peso de la oveja. Supongamos también que ese anestésico es eliminado de la corriente sanguínea de la oveja en forma aproximadamente exponencial con una vida media de 5 horas. ¿Qué cantidad de medicamento permanece en la corriente sanguínea de la oveja a las 12 horas? ¿Qué dosis debe ser administrada para tener anestesiada durante una hora a una oveja de 55 kilos de peso? Supongamos el siguiente valor de $k = 0.138629436$

Nota: más adelante se verá cómo calcular este valor de k cuando estudiemos los logaritmos.

Solución:

La función $A(t) = A_0 e^{-kt}$ será la función apropiada

Si al cabo de 5 horas la cantidad de anestésico que permanece en la corriente sanguínea es la mitad de la dosis administrada inicialmente (vida media) entonces a las 5 horas habrá la mitad de la dosis inicial.

A las 12 horas de ser administrado el anestésico, la cantidad de medicamento que permanece en la corriente sanguínea de la oveja será:

$$A(12) = A_0\, e^{-0.1386294361(12)} = 0.18946457\, A_0$$

Aproximadamente un 19% de la dosis inicial.

Por otro lado, si la oveja pesa 55 kilos y queda anestesiada cuando la concentración del somnífero es de por lo menos 40 mg por kilo de peso, debemos calcular que al cabo de una hora haya por lo menos 2200 miligramos de medicamento en su sangre.

Utilizando la expresión inicial

$$2200 = A_0\, e^{(-0.138629436(1))} = A_0(0.870550563)$$

Despejando A_0 obtenemos $A_0 = 2527.136382$ esto significa que se le deben haber suministrado 2.527 g. del anestésico.

Ejercicio 4

1. Si una persona ingirió 35 mg de medicamento y el organismo elimina el 12% cada hora, ¿qué cantidad de medicamento habrá en su organismo después de 3, 5, 9, y 12 horas?

2. Supongamos que el virus de una enfermedad se propaga entre una población diariamente el 3.5%. Si inicialmente hay 76 personas con ese virus ¿cuántas personas estarán contagiadas en 5, 10 15 días si las condiciones prevalecen?

Ley de enfriamiento de Newton

La ley de enfriamiento de Newton establece que la manera como cambia la temperatura de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante A, con respecto al tiempo, está dada por:

$$T(t) = A - (A - T_0)e^{-kt},$$

Donde T_0 es la temperatura inicial del cuerpo. Las temperaturas A, T_0 y T están dadas en grados Fahrenheit.

Ejemplo 7

Regularmente desde mediados de noviembre hasta mediados de febrero del siguiente año, en la capital del país baja mucho la temperatura por las mañanas. El Prof. Roberto acostumbra prepararse un café antes de iniciar su clase.

Para preparar el café el agua debe estar hirviendo. Supongamos que cierto día la temperatura al exterior es de 10º C. Si el Prof. prepara su café y lo mantiene en su taza antes de poderlo beber, ¿Cuál será la temperatura del café a los 15 o 25 minutos después que lo preparó? Supón que k=0.129

Solución:

Primero debemos convertir las temperaturas de 10º C y 100º C a grados Fahrenheit utilizando la siguiente relación

$$^{\circ}F = \left(\frac{9}{5}\right)^{\circ}C + 32$$

$$^{o}F = \left(\frac{9}{5}\right)(10) + 32 = 50 \quad \text{y} \quad ^{o}F = \left(\frac{9}{5}\right)(100) + 32 = 212$$

Por lo tanto, *10ºC* equivalen a *50ºF* y *100ºC* equivalen a *212ºF*

La expresión para conocer la temperatura del café a los 15 minutos es:

$$T(15) = 50 - (50 - 212)e^{(-0.129\times 15)} = 73.4^{o}F$$

Este último resultado lo convertimos a grados centígrados con la relación

$$^{o}C = (^{o}F - 32)\left(\frac{5}{9}\right)$$

Entonces $^{o}C = (183.5 - 32)\left(\frac{5}{9}\right) = 23$

Esto significa que a los 15 minutos la temperatura del café es de 23º C

La temperatura del café a los 25 minutos será:

$$T(25) = 50 - (50 - 212)e^{(-0.129\times 25)} = 56.44^{o}F$$

A los 25 minutos la temperatura del café será 13.58ºC

Por consiguiente, el Prof. Roberto no debería esperar mucho tiempo para beber su café.

Ejercicio 5

1. Una chuleta de 2.5 kilogramos que está inicialmente a 50º F, se mete al horno calentado previamente a 375º F para su cocimiento. ¿Qué temperatura alcanza la chuleta a los 10, 15, 30, 45 y 60 minutos? Supón que *k* = 0.0035.

2. Un pescado entero, ya marinado, se saca del refrigerador estando a una temperatura de 4ºC y se coloca en el horno a una temperatura de 350º F para su cocimiento. Supón que k = 0.00258. ¿Qué temperatura alcanza a los 18 y 25 minutos?

Determinación de edades por el método de carbono 14.

Alrededor de 1950 el químico William Libby[1] ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad aproximada de los fósiles en Arqueología, Antropología, Oceanografía, etc. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 se produce en la atmósfera por acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. La proporción del isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere la absorción de carbono 14 cesa. De esta manera, comparando la proporción de carbono 14 que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. La vida media del carbono 14 es de 5730 años.

Para la determinación de edades de fósiles se considera la siguiente expresión:

$$N(t) = N_0\, e^{-kt}$$

$N(t)$ representa la cantidad de carbono restante en un fósil al cabo de t años.

Ejemplo del fósil 8

Un fósil fue encontrado en cierta ciudad ¿cuál es el porcentaje de Carbono 14 que contiene si tiene una antigüedad de 1500 años? Supón que para el Carbono 14, k = 0.000120968

Si t = 1500 años y k = 0.000120968, entonces

¿Qué porcentaje de carbono 14 contiene?

$$N = N_0\, e^{-0.000120968(1500)} = N_0\,(0.83405827) \;=$$

Por lo tanto el porcentaje de carbono 14 que contiene el fósil es 83.4085% de N_o.

[1] William Libby ganó el Premio Nobel de Química por su método de datación mediante el Carbono 14, también fue responsable de la separación y enriquecimiento de los isótopos del Uranio-235, usados en la bomba atómica sobres Hiroshima.

Ejercicio 6

1. Una momia descubierta en el Valle de los Reyes en Egipto había perdido el 43% de su carbono 14,¿cuál es su edad?

Se encontraron los restos de un mamut y éstos conservaban el 76% del Carbono 14. ¿Cuál será su edad?