Aplicaciones de los logaritmos

Sugerencias para quien imparte el curso

Consideramos muy conveniente resolver, junto con los alumnos, ejemplos como los que se muestran enseguida

Considerar la ecuación $3^x = 31$.

Para resolverla podemos aplicar logaritmos (vulgares o naturales) a ambos miembros de la ecuación

$$\log 3^x = \log 31 \qquad \ln 3^x = \ln 31$$

$$x \log 3 = \log 31 \qquad x \ln 3 = \ln 31$$

$$x = \frac{\log 31}{\log 3} = \frac{1.491361}{0.477121} = 3.12575 \qquad x = \frac{\ln 31}{\ln 3} = \frac{3.433987}{1.098612} = 3.12575$$

Y así obtenemos el valor de la incógnita x.

Recordando el problema con el que iniciamos esta unidad, para obtener cuánto tiempo tarda en duplicarse el capital que solicitó Jorge debemos resolver la ecuación $13{,}000 = 6{,}500(1.01)^t$

Esta ecuación podemos escribirla como $\frac{13000}{6500} = 2 = (1.01)^t$

Podemos aplicar logaritmos tanto naturales como vulgares para obtener el valor de x.

$$\ln 2 = \ln(1.01)^x = x \ln(1.01)$$

$$\frac{\ln 2}{\ln(1.01)} = x$$

$$\frac{\ln 2}{\ln(1.01)} = x$$

$$x = \frac{0.6931471806}{0.00995033} = 69.6607168$$

Esto significa que Jorge tardaría 69.6607168 meses, casi 6 años en duplicar su inversión.

Si hacemos el cálculo aplicando logaritmos vulgares veremos que obtenemos el mismo valor

$$\log 2 = x \log(1.01)$$
$$x = \frac{\log 2}{\log(1.01)} = \frac{0.3010299}{0.004321373} = 69.6607168$$

Cuestionar a los alumnos cómo se obtiene la constante k de la que se han proporcionado valores en algunos problemas.

Por ejemplo, para resolver la ecuación siguiente en que la incógnita es k

$$N_0 e^{-5730k} = \frac{1}{2} N_0$$

De la última igualdad se puede eliminar N_0, quedando solamente

$$e^{-5730k} = \frac{1}{2}$$

aplicamos logaritmos naturales a ambos miembros de la ecuación,

$$\ln(e^{-5730k}) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos

$$-5730\ k\ \ln e = \ln(1) - \ln(2)$$

Investigar ¿cuál es el valor de $\ln e$? _____

El ln(1) es igual a cero, por lo que si despejamos k esta será igual a:

$$k = \frac{-\ln(2)}{-5730} = \frac{-0.69314778}{-5730} = 0.000120968$$

En el **ejemplo 6** (página 15) en el que se pregunta la cantidad de somnífero para anestesiar una oveja, se menciona como dato $k = 0.138629436$. ¿cómo podemos conocer el valor de esa constante?

El dato que se proporciona es que la cantidad de medicamento es eliminado de la corriente sanguínea en forma aproximadamente normal con una vida media de 5 horas.

Esto significa que al cabo de 5 horas, solamente permanece en la corriente sanguínea de la oveja la mitad de la dosis suministrada de medicamento.

La expresión que se usó fue $A(t) = A_o e^{-kt}$

Entonces $A(5) = \frac{1}{2} A_0 = A_0\, e^{-k(5)}$

En esta última expresión la incógnita es k y aparece en el exponente, por tanto habrá que aplicar logaritmos para despejarla.

Simplificamos la expresión dividiendo ambos miembros por A_0

Y aplicamos logaritmos naturales

$$\frac{1}{2} = e^{-kt}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln e^{-5k}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -5k \ln e = -5k$$

En este ejemplo conviene utilizar logaritmos naturales en vez de vulgares pues en la expresión para despejar la incógnita k aparece la función exponencial natural y $ln\ e = 1$, es decir, se simplifica más fácilmente.

Despejamos finalmente k, para obtener k=

$$k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{-5} = \frac{-0.6931471}{-5} = 0.138629436$$

Este fue el valor que se proporcionó en el problema.

Ejemplo 15

Se encontraron huesos humanos que contenían solamente 65% del carbono 14 que se encuentra en los huesos de las personas vivas. ¿Hace cuánto tiempo murió la persona a la que pertenecieron los huesos?

Solución:

Si la cantidad inicial de Carbono 14 en organismos vivos es N_0 y el cuerpo hallado contiene solamente el 65%, entonces contendrá $0.65\,N_0$.

La ecuación se puede escribir como

$N(t) = 0.65\,N_0 = N_0\,e^{-0.000120968t}$ y la incógnita es precisamente el valor de t.

En realidad cuando se habla de funciones lo correcto es llamar a t la variable independiente, mejor que incógnita.

Podemos eliminar N_0 de la igualdad dividiendo por esta cantidad ambos miembros.

$$0.65 = e^{-0.00120969t}$$

Aplicamos logaritmos ambos miembros de la igualdad

$$\ln(0.65) = \ln(e^{-0.000120968t})$$
$$\ln(0.65) = -0.000129968t \ln e$$
$$\ln(0.65) = -0.000120968t$$

Despejamos t como $t = \dfrac{\ln(0.65)}{-0.000120968} = \dfrac{-0.4307829161}{-0.000120968} = 3561.13117$

Por lo tanto podemos afirmar que los huesos humanos tenían 3561 años

Terremotos

La magnitud de un terremoto está dada por $R = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$ medida en la escala de Richter. I_0 es la intensidad mínima considerada como referencia.

El número R de la escala de Richter, empleado para medir la intensidad de los sismos también suele expresarse como $R = \log I$, donde I es la intensidad relativa del choque de placas tectónicas.

Ejemplo 16

Un terremoto tuvo una intensidad de 1.85×10^7 veces I_0. ¿Cuál fue su magnitud en la escala de Richter?

Si sustituimos los datos en la expresión $R = \log\left(\dfrac{I}{I_0}\right)$, tendremos

$$R = \log \frac{1.85 \times 10^7\ I_0}{I_0} = \log 1.85 \times 10^7$$

$= _____ + _____$

$= _____ + 7$

$= 7.2671717284$

por lo tanto el terremoto fue de magnitud 7.267 en la escala de Richter.

Intensidad del sonido, Decibeles

La intensidad M del sonido, medida en decibeles(dB), está dada por

$$M = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Donde I es la potencia del sonido e I_0 es la potencia mínima que puede percibir el oído humano, llamada también potencia del sonido exactamente bajo el umbral de audición.

En una vivienda tranquila, un medidor de sonido marcaría $38\ dB$. Una conversación normal aumentaría el valor hasta $70\ dB$. Una alarma antiaérea puede alcanzar unos $150\ dB$, un avión a reacción $120\ dB$.

Cuando la intensidad física de un sonido se duplica, la sensación auditiva aumenta en $3\ dB$, cuando se triplica aumenta en $6\ dB$.

Ejemplo 17

¿Cuál será la intensidad en decibeles en un estudio de grabación donde la potencia I es 13500 veces I_0?

Solución

Sustituyendo los datos en la expresión $M = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$

$M = 10\ log\ \frac{13500\ I_0}{I_0} = 10\ log\ 13500 =$ _____ dB.

Valor del pH en Química

En Química, pH se define como $pH = -log\left[H^+\right]$

donde $\left[H^+\right]$ es la concentración de iones de Hidrógeno en moles por litro.

El pH tiene un rango de 0 a 14. Un pH de 7 se considera neutro. Un valor mayor de 7 es alcalino y un valor menor de 7 es ácido

Ejemplo 4.18

Para los tomates, $\left[H^{+}\right]$ es de alrededor de 6.3×10^{-5} moles por litro

Por lo tanto $pH=-\log\left[6.3\times10^{-5}\right]=-\left(\log 6.3+(-5)\right)\approx 4.2$

Esto significa que los tomates son alcalinos

Ejemplo 18

Una sustancia radiactiva con una vida media de *350* años decae exponencialmente. Determina el valor de k en la expresión $N = N_0\, e^{-kt}$, siendo N la cantidad presente de la sustancia después de t años y N_0 la sustancia inicial.

Solución

Si la vida media es de *350* años, esto significa que si $t = 350$, entonces

$N(350)=\frac{1}{2}N_0$, al sustituir en la expresión dada resulta $\frac{1}{2}N_0 = N_0\, e^{-350k}$

Simplificando N_0 tendremos $\frac{1}{2}=e^{-350k}$ a la cual le aplicamos logaritmos naturales para obtener $\ln\frac{1}{2}=\ln e^{-350k}$

$$\ln 1-\ln 2=-350k$$

$$k=\frac{\ln 2}{350}=0.0019804$$

Ejemplo 19

Una persona deposita $ 2,500 en el banco y éste le pagará intereses del 4.44% anual. Si cada mes se pagan intereses y se reinvierte capital e interés, ¿en cuánto tiempo podría triplicar la persona su capital?

Solución:

Si el banco paga intereses mensualmente, le pagará el 0.0037% mensual.

La cantidad de dinero que la persona tendrá al cabo de t períodos de depósito está dada por

$$f(t) = 2500(1+0.0037)^{t}$$

Si quiere saber en cuánto tiempo se triplicará su dinero ....

$$7500 = 2500\,(1.0037)^{t}$$
$$3 = (1.0037)^{t}$$

aplica logaritmos para obtener el valor de t

$$t=\frac{\log(3)}{\log(1.0037)}=297.47120$$

Esto significa que aproximadamente en 24 años 9 meses esa persona podría triplicar su capital.

Ejemplo 20

Supongamos que la población de una ciudad era de *68,000* habitantes en 1972 y que en 1985 había aumentado a *106,000*. Encuentra el valor de la constante k y calcula de acuerdo a ese valor cuál sería la población de esa ciudad en el año 2003.

Solución:

El año inicial se considera 1972 y para 1985 han transcurrido 13 años.

Considera la función $N(t) = N_0 e^{kt}$

En el año 1972 la población era de $68,000 = N(0) = 68,000 e^{k(0)}$

Al año 1985 la población era de $106,000 = N_0\, e^{k(13)} = 68,000\, e^{13k}$

De esta última expresión habrá que despejar k.

$$106,000 = 68,000\, e^{13k}$$

$$\frac{106,000}{68,000} = e^{13k}$$

Aplicando logaritmos naturales

$$\ln(1.558823529) = 13k \cdot \ln e = \frac{0.44393138}{13} = k$$

$$k = 0.034148568$$

Entonces el valor de k es *0.03414856836*

Al año 2003 habrán transcurrido 31 años**,** entonces el número de habitantes de esa población será:

$N(31) = 68,000\, e^{0.03414856836(31)} = 195,999.7384$ habitantes, casi el triple de la población inicial.

Ejercicio 8

1. Un pueblo tiene 85,000 habitantes y su población aumenta 11% cada año ¿cuál será su población dentro de 6 años?

2. Un cultivo de bacterias se incrementa cada hora en un 65%. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 10 y de 15 horas, si inicialmente hay 15 bacterias?

3. Una persona pide un préstamo de $ 35,000 a un interés compuesto anual de 13.5% y lo pagará en cuatro años, liquidándolo al final. ¿Cuánto dinero tendrá que pagar?

4. Si el ruido que produce dolor en el oído es de 10^{14} veces I_0 ¿cuál será su intensidad en decibeles?

5. El Yodo radiactivo se usa regularmente como trazador para realizar estudios de la glándula tiroides. Si la sustancia decrece de acuerdo a

$A(t) = A_0(0.5)^{0.125t}$,

siendo A_0 la dosis inicial y t el tiempo en días, ¿cuánto tiempo tardará para que la cantidad de Yodo sea sólo la mitad de la dosis suministrada? y ¿cuánto tiempo tardará para que sólo reste una tercera parte?

6. Se invierten $ $15,000$ en un fondo de inversión en el que se pagan intereses anualmente a una tasa del 10.5% anual. Escribe una expresión algebraica para obtener la cantidad de dinero al cabo de t años y con ella calcula cuánto tiempo tardará la inversión en duplicarse. Calcula también cuánto tiempo tardará para que haya $ $25,000$ en la cuenta.

7. Cierta sustancia radiactiva tiene vida media de 8 días ¿qué fracción de la cantidad inicial quedará después de 35 días?

8. Considera que para la leche $\left[H^+\right]$ es de 4×10^{-7} moles por litro y para el huevo $\left[H^+\right]$ es de 1.6×10^{-8} ¿Cuál de estos dos alimentos es más ácido?

9. Una sustancia radiactiva que pesa inicialmente 150 gr. decae exponencialmente de acuerdo a $N(t) = 150^{e-kt}$. Calcula k sabiendo que después de 10 días quedan sólo 30 gramos de la sustancia.

10. El terremoto ocurrido en cierta ciudad tuvo una intensidad de 2.5×10^8 veces I_0, ¿cuál fue su magnitud en la escala de Richter?