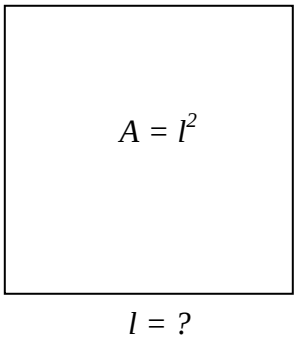
REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA Y DOMINIO DE UNA FUNCIÓN CON RADICALES

Retomaremos los problemas planteados antes, para establecer la regla de correspondencia de la función, así como el dominio de cada una de ellas.



El problema del cuadrado

Expresa la longitud del lado de un cuadrado en términos de su área.

La relación con la que dimos respuesta a este problema se expresó así:

$$l = \sqrt{A}$$

Para asegurar que l define una función $l(A)$, debemos optar por un solo signo de la raíz. En este caso elegimos el signo positivo, porque l es un lado del cuadrado y no tiene sentido que sea negativo.

De manera que ahora la expresión $l(A) = +\sqrt{A}$ corresponde a una función bien definida.

Para precisar el dominio de la función anterior, debemos recordar que la raíz cuadrada de un número real sólo es un número real cuando el subradical es **no negativo**.

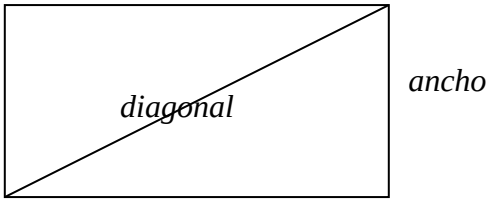
Observar que la restricción anterior no tiene que ver con la definición de función, se trata de una propiedad de los números reales:

$\sqrt{-9}$ no existe en los números reales porque ninguno de ellos elevado al cuadrado da -9 como resultado.

$+\sqrt{4} = 2$ porque $2^2 = 4$, $+\sqrt{49} = 7$ porque $7^2 = 49$, pero $+\sqrt{-100}$ no existe en los números reales porque ningún número real elevado al cuadrado da -100 como resultado.

En conclusión, la función $l(A) = +\sqrt{A}$ tiene como dominio $\{A \in \Re | A \geq 0\}$, que expresado como intervalo es: $[0, \infty)$.

Resultado que en el contexto de nuestro problema tiene sentido, puesto que A es el área de una figura y no puede ser negativa.



El problema de la diagonal

¿Cómo puede expresarse la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 10 metros, a partir de su ancho?

La relación que obtuvimos al resolver el problema fue:

$$d = \sqrt{2x^2 - 10x + 25}$$

¿Cómo expresar la relación anterior para que defina una función con precisión?

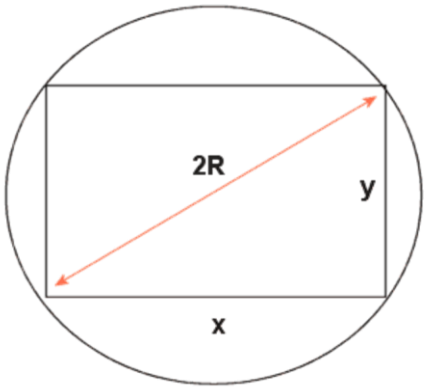
Otra vez elegimos el signo positivo debido a que d representa la longitud de la diagonal del rectángulo y no puede ser negativa.

$$d = +\sqrt{2x^2 - 10x + 25}$$

Para encontrar el dominio de esta función podemos usar las condiciones del problema.

Sabiendo que x es el ancho del rectángulo, ¿cuál es el menor y cuál el mayor valor que puede tomar?

De manera que el dominio de la función que expresa la diagonal en función del ancho $d(x) = +\sqrt{2x^2 - 10x + 25}$ es $\{x \in \Re | 0 \le x \le 5\}$, que equivale al intervalo cerrado *[0,5]*.



El problema del rectángulo inscrito

Un pintor, al elaborar un diseño, desea expresar el área del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio *6 cm*, en términos del ancho del rectángulo.

El pintor acude a un familiar suyo que estudia geometría para que le resuelva el problema. ¿Cómo lo habrías resuelto tú?

La relación que obtuvimos al resolverlo es:

$$A = x\sqrt{144 - x^2}$$

¿Cómo expresar la relación anterior para que defina una función con precisión?

$$A = x\,(+\sqrt{144 - x^2})$$

Para encontrar el dominio de esta función debemos concentrarnos en la parte que contiene el radical y asegurar que la raíz sea un número real, es decir:

$144 - x^2$ debe ser no negativo.

Para obtener los valores de x que hacen que $144 - x^2$ sea no negativo, debemos resolver la desigualdad

$$144 - x^2 \geq 0$$

Sugerencia para quien imparte el curso.

En este momento del curso es oportuno presentar el siguiente contenido temático, indispensable para poder continuar y arribar a los propósitos de la unidad.

El procedimiento para resolver esta desigualdad es muy parecido al que empleamos en las igualdades:

1. Sumamos x^2 a ambos miembros: $144 \geq x^2$

2. Extraemos raíz cuadrada positiva a ambos miembros: $+\sqrt{144} \geq +\sqrt{x^2}$, lo que equivale a : $12 \geq |x|$ o bien $|x| \leq 12$.

3. Observar que la desigualdad $|x| \leq 12$ se cumple siempre que $-12 \leq x \leq 12$.

Reflexionar en esta última desigualdad y verificar que todos los valores de x en el intervalo *[-12,12]* cumplen con $144 \geq x^2$

Completar la tabla siguiente:

x	-12	-10	-3	-0.8	0	5	7.2	12
x^2								

El dominio de la parte de la función que contiene el radical es el intervalo *[-12,12]*.

Recordar que la función que estamos analizando es $A(x) = x\,(+\sqrt{144 - x^2})$, la parte que no incluimos en el análisis es *x*, que corresponde al ancho del rectángulo y que impone la condición de no poder ser negativo.

En conclusión, el dominio de la función completa $A(x) = x\,(+\sqrt{144 - x^2})$, en el contexto del problema que la originó es $\{x \in \Re \mid 0 \le x \le 12\}$, que equivale a *[0,12]*.

Debido a la naturaleza geométrica de los problemas que hemos planteado, en todos optamos por el signo positivo de la raíz.

Esto no necesariamente es así, habrá problemas en los que la función represente una aceleración hacia abajo, una velocidad hacia atrás, etc. que se modelarán usando el signo menos de la raíz, con expresiones como:

$v = -\sqrt{v_0^{\,2} + 2ax}$, $F(x) = -\sqrt{x}$, $F(x) = -\sqrt{4 - x}$, etc.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Es pertinente comentar en este momento con los estudiantes la necesidad de optar por un signo del radical de orden par, para definir realmente una función. Hacer énfasis en la diferencia entre una función y una relación.

Ejemplos

A continuación obtendremos el dominio de algunas funciones cuya regla de correspondencia incluye radicales.

1. $F(x) = +\sqrt{-x}$

Ahora necesitamos que $-x \ge 0$. Multiplicando ambos miembros por *–1*: $x \le 0$

Observar que el signo de la desigualdad **se invirtió**.

Por lo tanto, para que la raíz cuadrada esté en los números reales, se requiere que *x* tome valores cero o negativos.

Solicitar a los estudiantes que escriban el dominio de esta función.

2. $F(x) = -\sqrt{-x}$

Nuevamente hacemos que $-x \geq 0$, que equivale a $x \leq 0$.

Pedir a los alumnos que escriban el dominio de esta función.

3. $F(x) = +\sqrt{x+5}$

Como se debe cumplir $x + 5 \geq 0$, $x \geq -5$;

Escribir el dominio de esta función.

4. $F(x) = -\sqrt{x-3}$ **;**

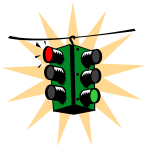
Escribir el dominio de esta función.

5. $F(x) = -\sqrt{5-x}$; $5 - x \geq 0$; $5 \geq x$, o $x \leq 5$.

Escribir el dominio de esta función.

6. $F(x) = +\sqrt{x^2 - 16}$; $x^2 - 16 \geq 0$; $x^2 \geq 16$; $\sqrt{x^2} \geq +\sqrt{16}$; $|x| \geq 4$.

Concluir la solución de la desigualdad y dar el dominio de esta función



Conceptos clave:

3. **Para definir una función usando radicales de segundo orden, tendremos que asignar explícitamente un signo al radical:**

$F(x) = +\sqrt{x+6}$ ó $F(x) = -\sqrt{x-3}$

4. **El procedimiento para resolver una desigualdad, es muy similar al empleado para resolver una igualdad, excepto cuando la desigualdad se multiplica o divide por un número negativo, en cuyo caso la desigualdad se invierte.**

$4 > -2$, si multiplicamos la desigualdad por -1, tendremos que $-4 < 2$

$3 < 5$, si multiplicamos la desigualdad por -1, tendremos que $-3 > -5$

5. Las expresiones $+\sqrt{x^2}$ **y** $|x|$ **son equivalentes.**

Ejercicio 2

Para cada una de las funciones que se dan a continuación hacer lo necesario para encontrar el dominio. Expresarlo como conjunto y como intervalo.

1. $F(x) = +\sqrt{5x}$;
2. $F(x) = +5\sqrt{x}$;
3. $F(x) = -\sqrt{-2x}$
4. $F(x) = -2\sqrt{x}$;
5. $F(x) = +\sqrt{4x-8}$;
6. $F(x) = -\sqrt{-3x-6}$