REPRESENTACIÓN ALGEBRAICA DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

Sugerencia para quien imparte el curso.
Para facilitar la comprensión de las actividades que se llevarán a cabo a continuación, proponemos el siguiente ejercicio, consistente en convertir expresiones verbales en expresiones algebraicas.

Escribe en el paréntesis el número que corresponde a la expresión verbal de la izquierda.

1. Un número cualquiera. ( ) $\frac{x^3}{2}$
2. Un número disminuido en 40 unidades. ( ) $\frac{x}{y}$
3. El triple de un número. ( ) $3x$
4. El cuadrado de un número. ( ) $\frac{x}{2}+40y$
5. La mitad del cubo de un número. ( ) $40-\frac{x+y}{5}$
6. La diferencia entre dos números cualesquiera. ( ) x^2
7. El cociente de dos números cualesquiera. ( ) $2(x + 40)$
8. La suma de los cuadrados de dos números. ( ) $x - 40$
9. El cuadrado de la suma de dos números. ( ) $x^2 + y^2$
10. La mitad de un número, aumentado en 40 veces otro número. ( ) $\frac{x}{40}-2\,(x+40)$
11. 40 disminuido en un quinto de la suma de dos números. ( ) x
12. Dos veces la suma de un número y 40. ( ) $x-y$
13. El cociente de un número y 40, disminuido en el doble de su suma. ( ) $(x+y)^2$

Con el fin de analizar algunos casos más generales de funciones racionales, resolvamos

Ejercicio 2

En cada uno de los siguientes ejercicios describimos con palabras la regla de correspondencia de una función, para que los estudiantes completen las parejas encontrando el valor de $F(x)$ que se asocia a cada x. Una vez familiarizados con el comportamiento de la función, escribirán la expresión algebraica que representa a esa regla de correspondencia.

1. La función que describimos toma cada elemento x del dominio, le agrega 3 unidades y lo divide entre el mismo número x aumentado en 5 unidades.

a) Encontrar el valor $F(x)$ asociado a cada x en la siguiente tabla, expresarlo en forma de fracción común, no con decimales.

x	10	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
$F(x)$	$\frac{13}{15}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{7}{9}$								

b) Si en la tabla anterior incluyéramos un valor indeterminado al que llamáramos x, ¿cómo podríamos expresar algebraicamente lo que la función hace con él? $F(x) =$ _____, ¡ésta es otra forma de representar la regla de correspondencia!

Verificar la validez de la respuesta aplicando la expresión propuesta a algunos valores x de la tabla.

2. La función que ahora describimos toma cada elemento x del dominio, lo multiplica por 3 y divide el resultado anterior entre el mismo x disminuido en 2 unidades.

a) Encontrar el valor $F(x)$ asociado a cada x en la siguiente tabla.

x	6	5	4	3	1	0	-1	-2	-3	1.5	-1.5
$F(x)$											

b) Escribir la regla de correspondencia en forma algebraica $F(x) =$ _____

c) Además de verificar con los valores obtenidos en la tabla, aplicar la regla de correspondencia propuesta a los siguientes valores de *x: 10, -6, 2.1, 2.01*

$F(10) =$ _____ ; $F(-6) =$ _____ ; $F(2.1) =$ _____ ; $F(2.01) =$ _____

3. La función *F(x)* toma cada elemento *x* del dominio, lo eleva al cuadrado y divide este resultado entre el número inicial *x* aumentado en 4 unidades.

a) Encontrar el valor *F(x)* asociado a cada *x* en la siguiente tabla.

x	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*	*-1*	*-2*	*-3*	*-5*
F(x)											

b) Escribir la regla de correspondencia en forma algebraica $F(x) =$ _____

c) Además de verificar los valores con que se llenó la tabla, aplicar la regla de correspondencia obtenida a los siguientes valores de *x: 10, -6, -3.9, - 3.99*

$F(10) =$ _____ ; $F(-6) =$ _____ ; $F(-3.9) =$ _____ ; $F(-3.99) =$ _____

Haremos un cambio en las siguientes actividades.

En cada uno de los siguientes ejercicios daremos un conjunto de parejas $(x, F(x))$, organizadas en una tabla, para que los alumnos descubran el comportamiento de cada función, lo describan en palabras y finalmente expresen la regla de correspondencia algebraicamente.

1.

x	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*-1*	*-2*	*-3*	*-4*
F(x)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	*1*	*-1*	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$

a) La función toma cada elemento *x* del dominio y _____

_____

b) La regla de correspondencia es $F(x) =$ _____

c) Calcular el valor que corresponde a *x = 1.5, 0.5, 0.1, 0.01*

2.

x	6	5	4	3	2	1	-1	-2	-3	-4
$F(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$

a) La función toma cada elemento x del dominio y _____

_____

b) La regla de correspondencia es $F(x) =$ _____

c) Calcular el valor que corresponde a $x = 1.5, 0.5, 0.1, 0.01$

3.

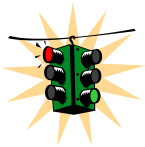
x	5	4	3	2	1	0	-2	-3	-4	100
$F(x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{100}{101}$

a) La función toma cada elemento x del dominio y _____

_____

b) La regla de correspondencia es $F(x) =$ _____

c) Calcular el valor que corresponde a $x = -0.5, -0.9, -0.99$



Conceptos clave:

4. Elementos necesarios para definir una función

i) Un conjunto de elementos a quienes se les aplicará la función, llamado dominio.

ii) Un conjunto de elementos, llamado contradominio, de donde se obtendrán quienes se asocien con los del dominio. Y

iii) Una regla de correspondencia que permite, de manera inequívoca, establecer el único elemento del contradominio que debe asociarse al correspondiente elemento del dominio.

Retomaremos una vez más los problemas iniciales.

En el problema de la zanja, ¿existe alguna restricción para los valores que puede tomar la variable *x:* número de trabajadores que cavan la zanja?

¿Se puede hablar de un número negativo de trabajadores? En el contexto del problema, ¿tiene sentido contratar cero trabajadores?

Entonces, para precisar el dominio en el que una función está definida, debemos atender a las condiciones del problema que estamos tratando.

Sin embargo, la expresión que define la regla de correspondencia de una función también puede imponer drásticas restricciones a su dominio.

En el caso de las funciones racionales $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, es indispensable eliminar del dominio de $F(x)$ los valores de x que hagan que $g(x) = 0$, por lo que hemos comentado acerca de la imposibilidad de dividir entre cero.

Analizar, a partir de su regla de correspondencia, algunas de las funciones con las que hemos trabajado

1. $F(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$.

¿Es posible aplicar esta función si la variable x toma el tipo de valores que se describen a continuación? Subrayar la respuesta que consideren correcta.

a) Fracciones como $x = 1.7, -6.28, \dfrac{5}{7}$, si no

b) $x = 0$. si no

c) Naturales como $x = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

d) Irracionales como $x = \sqrt{2}, \sqrt{11}, \pi$. si no

e) $x = -5$. si no

En efecto, si $x = -5$, $F(-5) = \dfrac{-5+3}{-5+5} = \dfrac{-2}{0}$, que NO es un número real.

Por lo tanto debemos excluir del dominio de $F(x)$ el valor $x = -5$.

En conclusión, la función $F(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$ tiene como dominio a todos los números reales excepto el número -5.

La restricción que impondremos siempre a una función racional, es que su denominador NO valga cero.

En el caso que analizamos, $x+5 \neq 0$ *es una desigualdad que se resuelve de manera similar a las igualdades que han resuelto*: $x+5 \neq 0$ sólo si $x \neq -5$.

Usando el concepto de intervalo o una desigualdad, podemos escribir el dominio de la función $F(x) = \dfrac{x+3}{x+5}$ en alguna de estas formas:

i. Como un conjunto. Dominio de *F(x):* $\Re - \{-5\}$. Conjunto de los números reales, menos el conjunto que consta del número –5.

ii. Usando una desigualdad. Dominio de *F(x):* $\{x \in \Re \mid \quad x \neq -5\}$. Conjunto de valores x que pertenecen a los números reales, tales que x es diferente de –5.

iii. Como intervalo. Dominio de *F(x):* $(-\infty,-5) \cup (-5,\infty)$. La unión de dos intervalos abiertos. Nótese que el –5 no pertenece a ninguno de los dos intervalos.

Otra función que analizamos fue $F(x) = \dfrac{3x}{x-2}$. Encontrar su dominio y expresarlo en las tres formas dadas anteriormente.

Ejercicio 3

Obtener el dominio de las siguientes funciones, que también fueron abordadas en esta unidad, expresarlo en las tres formas mencionadas.

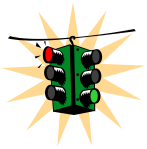
1. $F(x) = \dfrac{x^2}{x+4}$; 2. $F(x) = \dfrac{1}{x}$;

3. $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$; 4. $F(x) = \dfrac{x}{x+1}$

Encontrar el dominio de las siguientes funciones racionales. Verificar antes que están reducidas a su mínima expresión. Si no es así, reducirlas.

1. $F(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$; 2. $F(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2-1}$; 3. $F(x) = \dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$;

4. $F(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$; 5. $F(x) = \dfrac{x-5}{x^2-4x-5}$; 6. $F(x) = \dfrac{x+5}{x^3+125}$.



Conceptos clave:

5. Dominio de una función

Se llama **dominio** de una función al conjunto de valores a los que está permitido aplicar la regla de correspondencia que define la función.

El dominio de una función que se obtuvo para modelar un problema dado, se define tomando en cuenta las restricciones que el mismo problema impone.

El dominio de una función cualquiera debe especificarse cuando se define la función.

6. La imposibilidad de dividir entre cero

Decimos que *12 entre 3* es igual a *4*, porque *4(3) = 12*, cuando intentamos una división del tipo *12 entre 0*, nos encontramos con que NO existe un número que multiplicado por cero dé *12*, o cualquier otro número que tengamos en el dividendo.

Por lo que establecemos que la división entre cero no puede efectuarse en nuestro sistema numérico.