INTERPRETACIÓN DEL REGISTRO TABULAR
Y GRÁFICO DE UNA FUNCIÓN CON RADICALES

El problema de la función completa

Pensar en la función:

$$F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$$

¿Cómo afectan los parámetros *–2* y *+4* a la gráfica y el rango de la función

$$F(x) = -\sqrt{-5x-10}\,?$$

Como se puede apreciar, la función anterior también se define por medio de un radical, pero contiene parámetros que vale la pena analizar con más detenimiento.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Para que resulte más claro el análisis de la función $F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$, *vamos a descomponerla en partes, de manera que se observe uno a uno el efecto que produce cada uno de los parámetros introducidos.*

Las funciones que revisaremos son:

$F_1(x) = -\sqrt{-5x-10}$, $F_2(x) = -2\sqrt{-5x-10}$ y finalmente $F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$.

1. Empecemos con $F_1(x) = -\sqrt{-5x-10}$.

¿Qué desigualdad debemos resolver para encontrar el dominio de F_1?

$$-5x - 10 \geq 0$$

Los pasos necesarios para resolverla:

$-5x \geq 10$; $x \leq \dfrac{10}{-5}$; $x \leq -2$. Recordar que se invierte la desigualdad cuando dividimos entre un número negativo.

Por lo tanto, ¿cuál es el dominio de la función $\boldsymbol{F_1}$**?** ¿como intervalo?

Dominio = $\{x \in \Re | x \leq -2\}$ = (- ∞, -2]

Hacer notar, que en el momento de asignar valores arbitrarios a x dentro del dominio, buscamos, hasta donde es posible, aquéllos que den lugar a la raíz cuadrada de un cuadrado perfecto.

Mostrar una forma de obtener valores de x que produzcan números con raíz cuadrada entera.

Queremos que $-5x - 10 = 0$, resolviendo la ecuación: $-5x = 10$, $x = \frac{10}{-5} = -2$.

Para que $-5x - 10 = 1$, resolvemos $-5x = 1 + 10$, $-5x = 11$, $x = \frac{11}{-5} = -2.2$.

Resolver las ecuaciones necesarias para que el subradical valga $4, 9, 16, 25$ y 36.

$-5x - 10 = 4$, $-5x = 4 + 10$, $x = \frac{14}{-5} = -2.8$

$-5x - 10 = 9$, $-5x = 9 + 10$, $x = \frac{19}{-5} = -3.8$

$-5x - 10 = 16$, $-5x = 16 + 10$, $x = \frac{26}{-5} = -5.2$

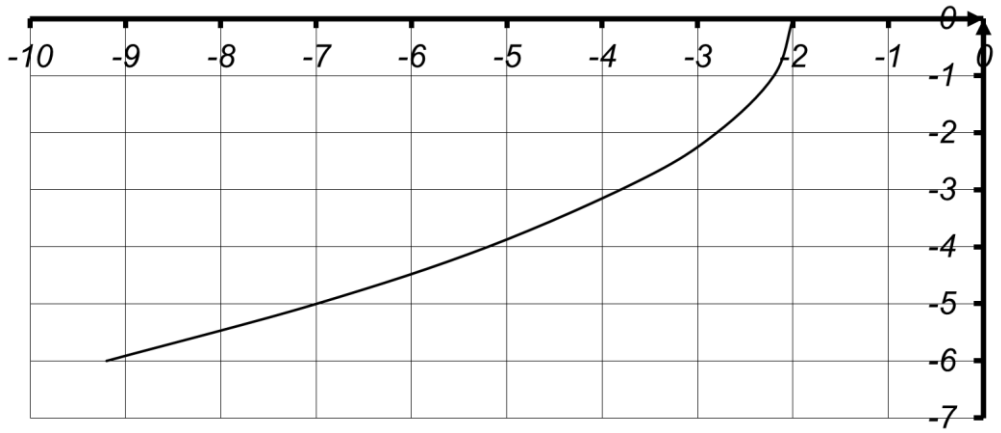
$-5x - 10 = 25$, $-5x = 25 + 10$, $x = \frac{35}{-5} = -7$

$-5x - 10 = 36$, $-5x = 36 + 10$, $x = \frac{46}{-5} = -9.2$

Completar la tabla correspondiente:

x	-2	-2.2	-2.8	-3.8	-5.2	-7	-9.2	$x \to -\infty$
$F_1 = -\sqrt{-5x-10}$								$F \to$ ___

La gráfica de F_1 se ve así:



El rango de $F_1(x) = -\sqrt{-5x-10}$ es:

Rango = $(-\infty, 0]$

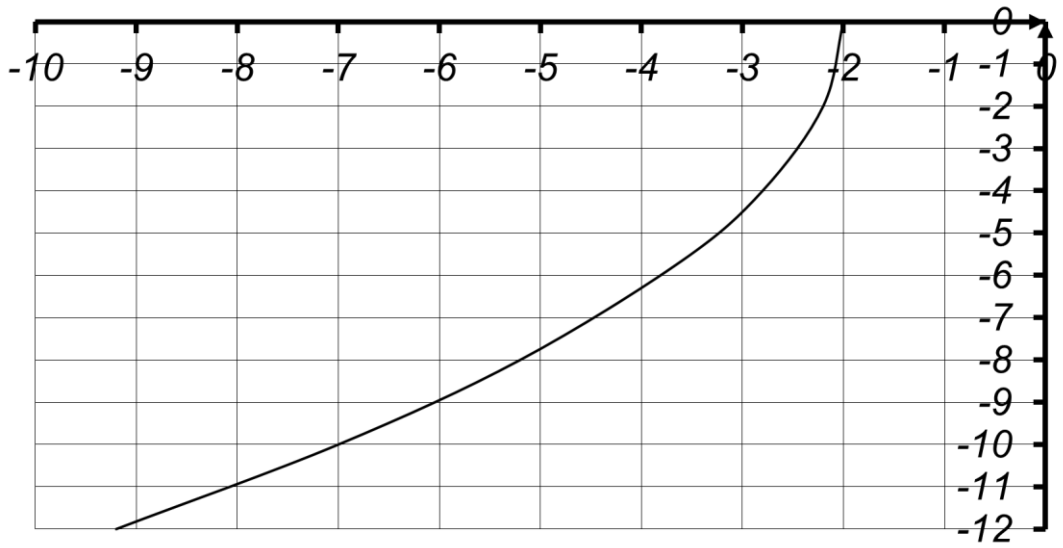
Función negativa excepto en $x = -2$, creciente, tiende a menos infinito cuando x tiende a menos infinito.

2. Revisemos ahora $F_2(x) = -2\sqrt{-5x-10}$.

Completar la tabla:

x	-2	-2.2	-2.8	-3.8	-5.2	-7	-9.2	$x \to -\infty$
$F_2 = -2\sqrt{-5x-10}$								$F \to$ ___

La gráfica de F_2 se ve así:



Escribir el rango de $F_2(x) = -2\sqrt{-5x-10}$

Rango = $(-\infty, 0]$

¿Qué variación causó en la gráfica de F_2 la introducción del parámetro *2* multiplicando a la raíz cuadrada? ¿Y en el rango?

La amplificó a lo largo del eje Y. El rango permaneció igual.

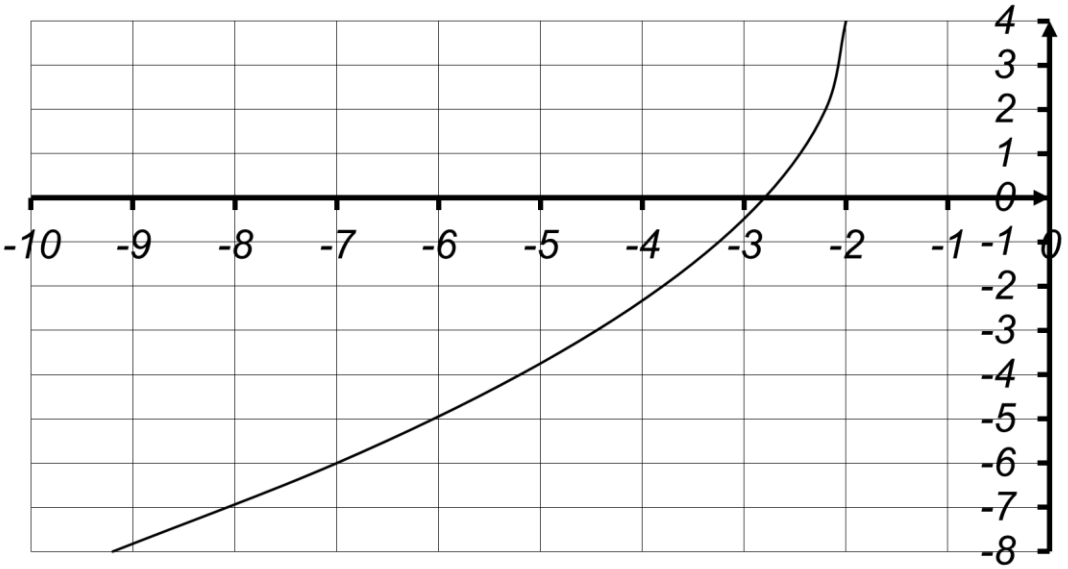
Función negativa excepto en $x = -2$, creciente, "amplificada" a lo largo del eje Y, tiende a menos infinito cuando x tiende a menos infinito.

3. Finalmente trabajemos con $F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$.

Completar la tabla:

x	-2	-2.2	-2.8	-3.8	-5.2	-7	-9.2	$x \to -\infty$
$F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$								$F \to$ ___

La gráfica final se ve así:



Escribir el rango de $F(x) = -2\sqrt{-5x-10} + 4$

Rango = $(-\infty, 4]$

¿Qué variación causó en la gráfica de *F*, con respecto a F_2, la introducción del parámetro *+4* sumado fuera de la raíz cuadrada? ¿Y en el rango?

La desplazó 4 unidades hacia arriba, a lo largo del eje Y. El rango cambió de $(-\infty, 0]$ a $(-\infty, 4]$.

¿Dónde corta al eje *X* esta gráfica?

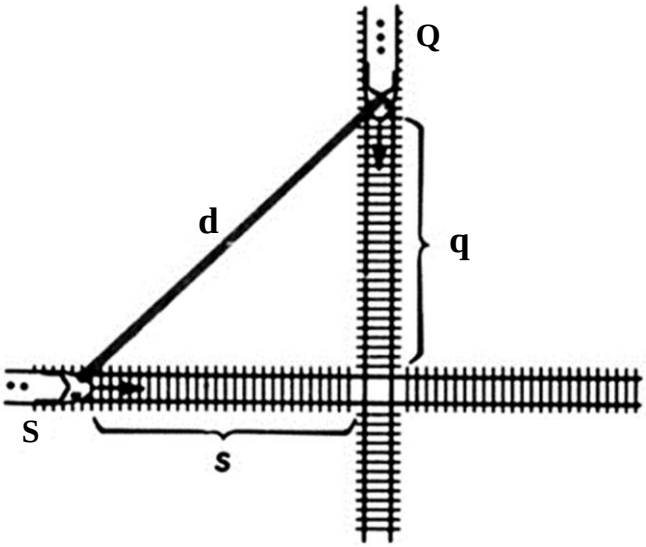
Para contestar esta pregunta, hacemos que *F(x)* valga cero y encontramos el valor de *x* donde eso sucede.

$-2\sqrt{-5x-10} + 4 = 0$; $-2\sqrt{-5x-10} = -4$; $\sqrt{-5x-10} = \frac{-4}{-2} = 2$; $-5x - 10 = 4$; $-5x = 14$; $x = \frac{14}{-5} = -2.8$

Tenemos finalmente una función creciente, negativa en $(-\infty, -2.8)$, positiva en *(-2.8,-2]*, que corta al eje *X* en *x = - 2.8*, desplazada *4* unidades sobre el eje *Y*, hacia arriba, con respecto a F_2, tiende a menos infinito cuando *x* tiende a menos infinito.

Sugerencia para quien imparte el curso.

Se propone plantear el siguiente problema que da lugar a una función con radicales. Como incluye el concepto de velocidad, se sugiere abordarlo conjuntamente con los alumnos, en una discusión grupal.



Dos vías de ferrocarril largas y rectas se cruzan entre sí perpendicularmente. El tren **Q** que viaja a una velocidad constante de 80 kilómetros por hora, cruza la intersección a las 12 horas sobre la vía **q**. El tren **S**, que viaja a una velocidad constante de 50 kilómetros por hora, cruza la intersección 10 minutos después sobre la vía **s**. ¿En qué instante se encuentran los trenes más cerca uno del otro?

Como: $v = \frac{distancia\ (d)}{tiempo\ (t)}$, $d = v\,t$, llamaremos v_s a la velocidad constante del tren **S**. Nótese que $v_S = 50\frac{km}{h} = 50\frac{km}{60\ min} = \frac{5}{6}\ \frac{km}{min}$ y

$$v_Q = 80\frac{km}{h} = 80\frac{km}{60\ min} = \frac{4}{3}\ \frac{km}{min}$$

Consideraremos las 12 horas, en que cruza el tren **Q,** como el tiempo $t = 0$ en minutos.

La distancia del tren **Q** a la intersección en el tiempo t es $q = v_Q\,t$, $q = \frac{4}{3}t$

La distancia del tren **S** a la intersección en el tiempo t es

$$s = v_S\,t,\ \ s = \frac{5}{6}(t - 10)$$

Aplicando el Teorema de Pitágoras, la distancia d entre los trenes en cualquier instante t se expresa así:

$$d^2 = q^2 + s^2$$

$$d^2 = \left(\frac{4}{3}t\right)^2 + \left(\frac{5}{6}(t-10)\right)^2$$

$$d(t) = +\sqrt{\frac{16}{9}t^2 + \frac{25}{36}(t^2 - 20t + 100)}$$

$$d(t) = +\sqrt{\frac{16}{9}t^2 + \frac{25}{36}t^2 - \frac{125}{9}t + \frac{625}{9}}$$

$$d(t) = +\sqrt{\frac{89}{36}t^2 - \frac{125}{9}t + \frac{625}{9}}$$

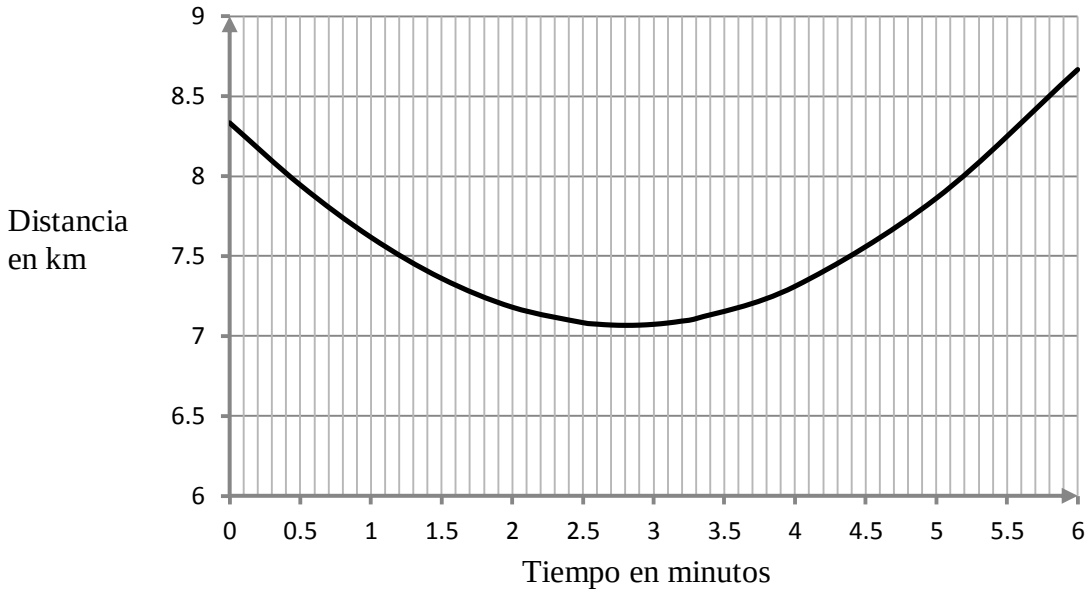
$$d(t) = +\sqrt{\frac{89t^2 - 500t + 2500}{36}}$$

$$d(t) = \frac{1}{6}(+\sqrt{89t^2 - 500t + 2500})$$

Hemos logrado expresar la distancia entre los dos trenes con una función que incluye un radical de segundo orden.

Ante la falta del recurso matemático que permite resolver el problema con toda precisión, llamado Cálculo Diferencial e Integral, llevaremos esta función a un graficador y del análisis de la gráfica obtenida sacamos las conclusiones que resuelven el problema.

Llevando esta función a un graficador, obtenemos la siguiente gráfica:



Donde podemos observar que la distancia mínima entre los trenes se obtiene aproximadamente 2.8 minutos después de que el tren más veloz Q cruza la intersección y es de poco más de 7 kilómetros.

Ejercicio 3

Para cada una de las funciones que se dan a continuación hacer lo siguiente:

a) Obtener el dominio.

b) Diseñar una tabla de valores.

c) Trazar la gráfica.

d) Obtener el rango.

e) Dar las características de la función que hemos venido analizando e

f) Indicar la tendencia de la función cuando x se aleja del origen.

1. $F(x) = -\sqrt{x} + 5$

2. $F(x) = +\sqrt{-x} - 2$

3. $F(x) = -\sqrt{6-x}$

4. $F(x) = -3\sqrt{6-x}$

5. $F(x) = -3\sqrt{6-x} + 2$

6. Partiendo de la experiencia adquirida en esta unidad, expresar con sus propias palabras el efecto que causa cada una de las constantes sobre la función: $F(x) = +\sqrt{x}$

$F(x) = +a\sqrt{bx+c} + d$

a) El signo de a. Si es + : _____

Si es - : _____

b) El valor de a. Si $a > 1$: _____

Si $0 < a < 1$: _____

c) El signo de b. Si es + : _____

Si es - : _____

d) El valor de b: _____

e) El valor de c: _____

f) El valor de d: _____