## GRÁFICA Y RANGO DE UNA FUNCIÓN RACIONAL

**Sugerencia para quien imparte el curso**.

*Antes de abordar esta parte del curso, se sugiere comentar con los estudiantes algunos aspectos como los siguientes:*

¿Qué debemos saber para graficar una función racional?

*Se esperan respuestas del tipo:*

1. Determinar el conjunto de valores que pueden darse a la variable independiente $x$. Es decir, el dominio.

2. A partir del dominio de la función, determinar sus puntos de ruptura.

3. Diseñar las tablas que sea necesario, de manera que nos aproximemos a cada punto de ruptura por la derecha y por la izquierda.

4. Graficar las asíntotas.

5. Bosquejar la gráfica de la función.

6. Determinar el rango de la función.

*Existen algunos resultados en Matemáticas que serán de utilidad para bosquejar gráficas de funciones racionales:*

- La gráfica de una función racional $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, consta de $k+1$ ramas o partes separadas, donde $k$ es el número de ceros reales del denominador $g(x)$.

- Los ceros reales de $F(x)$ coinciden con los ceros de $f(x)$. Es decir, las intersecciones de $F(x)$ con el eje $X$ ocurren precisamente donde el numerador $f(x)$ corta al eje $X$.

*Preguntar a los estudiantes: En su opinión, ¿qué es un punto de ruptura de la gráfica de una función?*

### ASÍNTOTAS

- Si $\boldsymbol{a}$ es un cero del denominador $g(x)$, la recta vertical $\boldsymbol{x = a}$ es una asíntota vertical de la gráfica de $F(x)$. Esto es, *si* $x \to a$ implica que $F(x) \to \infty$ o bien $F(x) \to -\infty$.

- La recta horizontal $\boldsymbol{y = b}$ es una asíntota horizontal de la gráfica de $F(x)$ si siempre que $x \to \infty$ ó $x \to -\infty$, necesariamente $F(x) \to b$.

El símbolo $x \to a$ significa que $x$ se acerca al valor $a$ sin límite alguno, aunque no llegue a tomar el valor $x = a$.

$F(x) \to \infty$ significa que los valores $F(x)$ crecen indefinidamente en la dirección positiva del eje $Y$.

$F(x) \to -\infty$ significa que los valores $F(x)$ crecen indefinidamente en la dirección negativa del eje $Y$.

**Ejemplo 3**

1. Grafica la función $F(x) = \frac{1}{x}$.

En este caso $f(x) = 1$ es una función constante y $g(x) = x$.

a) Escribir el dominio de la función.

b) ¿Decir de cuántas ramas va a constar la gráfica?

c) ¿Dónde está el único punto de ruptura? $x =$ ___

**PROCEDIMIENTO**

Una vez determinados los valores de los puntos de ruptura, es conveniente analizar el comportamiento de la función en torno a cada uno de ellos con un procedimiento como éste:

1. Dar valores a $x$ que se alejen del punto de ruptura hacia la derecha.

2. Dar a $x$ valores que se acerquen a la ruptura por la derecha, es decir, mayores que el del punto.

3. Dar valores a $x$, haciendo que se aleje del punto de ruptura hacia la izquierda.

4. Hacer que $x$ se acerque al punto de ruptura por la izquierda, es decir, con valores menores que el del punto.

Esto nos permitirá visualizar el comportamiento gráfico de la función y tener claridad acerca de sus tendencias.

Apliquemos este procedimiento al ejemplo que venimos trabajando, en el Ejemplo 3.

**i) Para** $x > 0$

a) Tomando valores $x \geq 1$.

Completar la tabla:

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $10$ | $100$ | $1000$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $1$ | | | | | | | | $F \to$ |

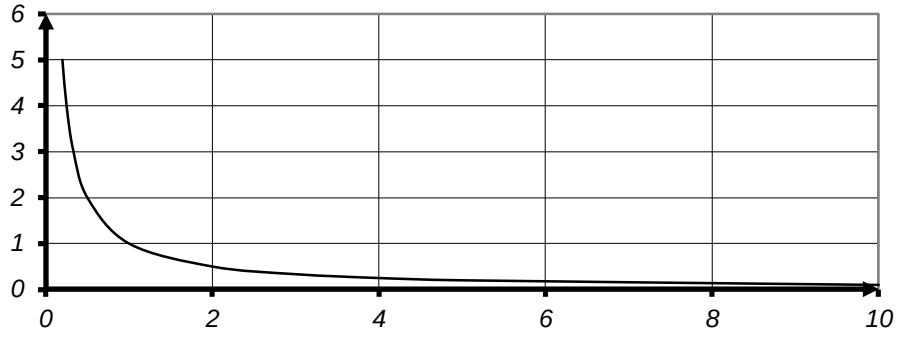
b) Ahora tomemos valores en $(0,1]$, haciendo que $x \to 0^+$.

Completar la tabla:

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{1000}$ | $x \to 0^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $2$ | | | | | | | $F \to$ |

De esta tabla deducimos que a medida que $x$ se acerca a cero por la derecha, es decir con valores positivos, $F(x)$ crece indefinidamente hacia arriba en Y.

Esta parte de la gráfica se ve así:




Vemos que el eje **Y** es una asíntota vertical y el eje **X** es una asíntota horizontal.

**ii) Para $x < 0$**

a) Tomando valores $x \leq -1$.

Completar la tabla:

| $x$ | -1 | -2 | -3 | -4 | -5 | -10 | -100 | -1000 | $x \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | -1 | | | | | | | | $F \to$ |

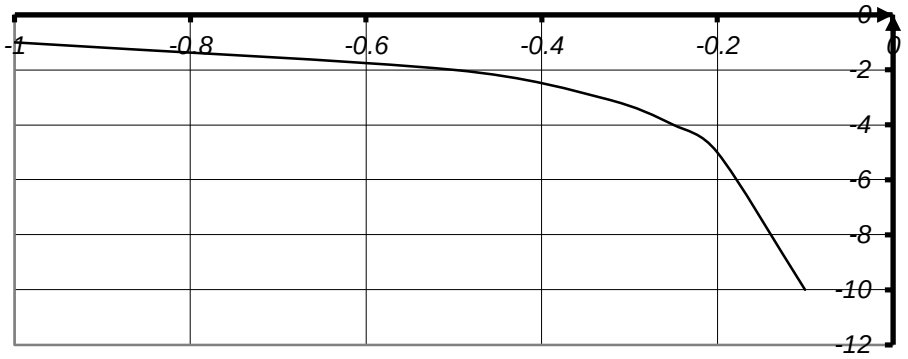
La expresión $F \to 0^-$ significa que la función $F(x)$, a lo largo del eje Y, se acerca cada vez más a cero, pero por abajo, con valores siempre negativos.

b) Ahora tomaremos valores en $[-1,0)$, haciendo que $x \to 0^-$.

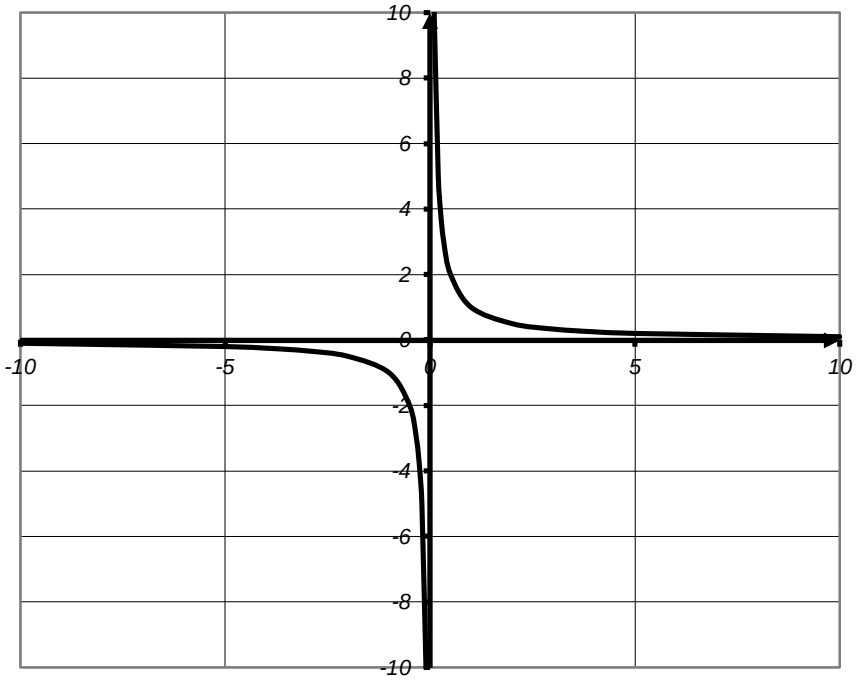
Completar la tabla:

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{100}$ | $-\frac{1}{1000}$ | $x \to 0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | -2 | | | | | | | $F \to -\infty$ |

Esta parte de la gráfica se ve así:



La gráfica completa es ésta:




Donde vemos que: Dominio $F(x) = \{x \in \Re / x \neq 0\}$. Rango $F(x) = \{y \in \Re / y \neq 0\}$. Las asíntotas son los ejes coordenados y el único punto de ruptura está en $x = 0$.

Función decreciente en todo su dominio, negativa en $(-\infty, 0)$ y positiva en $(0, \infty)$.

2. Graficar la función $F(x) = \dfrac{1}{x^2}$

En este caso también $f(x) = 1$, ahora $g(x) = x^2$.

¿Cuál es el dominio de esta función?

¿De cuántas ramas constará la gráfica? ¿Dónde está el punto de ruptura?

Preparando la gráfica:

i) Para $\boldsymbol{x > 0}$

a) Para $x$ en $[1, \infty)$.

Completar la tabla:

| $x$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ | $5$ | $10$ | $100$ | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | | | | | | $F \to$ |

b) Para $x \to 0^+$ .

Completar la tabla:

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{100}$ | $x \to 0^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $4$ | | | | | | $F \to$ |

i) Para $\boldsymbol{x < 0}$

a) Para $x$ en $(-\infty,-1]$.

Completar la tabla:

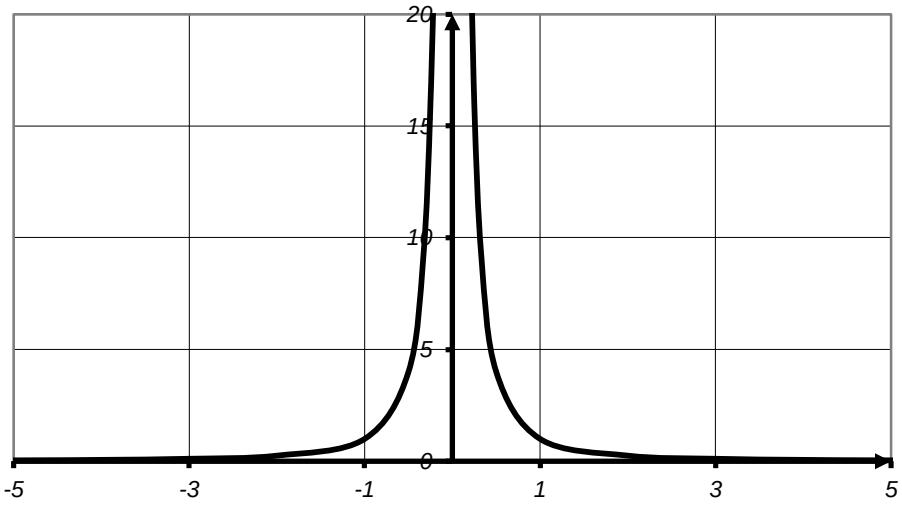
| $x$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $-10$ | $-100$ | $x \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $1$ | $\frac{1}{4}$ | | | | | | $F \to$ |

b) Para $x \to 0^-$.

Completar la tabla:

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{10}$ | $-\frac{1}{100}$ | $x \to 0^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | $4$ | | | | | | $F \to$ |

La gráfica se ve así:




Donde vemos que Dominio $F(x) = \{x \in \Re / x \neq 0\}$; Rango $F(x) = \{y \in \Re / y > 0\}$.

Se trata de una función siempre positiva, con los ejes coordenados como asíntotas, un punto de ruptura en $x = 0$, creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, \infty)$.

**Ejercicio 5**

Dar el dominio, los puntos de ruptura, bosquejar la gráfica, dar el rango, decir cuáles son las asíntotas, si las hay, dónde es creciente, decreciente, positiva o negativa, para cada una de las siguientes funciones.

**1.** $F(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Dominio de $F(x)$: _____. Punto de ruptura: $x =$ _____

Completar las tablas siguientes:

i) Para $\boldsymbol{x > 2}$

*a)* $\boldsymbol{x} \geq 3$

| $x$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 12 | $x \to \infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | | | $\frac{1}{5}$ | | **F→** |

b) Para $x \to 2^+$.

| $x$ | 2.5 | 2.4 | 2.3 | 2.2 | 2.1 | 2.01 | $x \to 2^+$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | 2 | 2.5 | | | | 100 | $F \to$ |

***i)*** Para $\boldsymbol{x < 2}$

*a)* $x \leq 1$

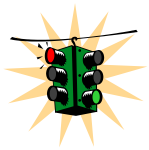
| $x$ | 1 | 0 | -1 | -2 | -3 | -8 | $x \to -\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | -1 | $-\frac{1}{2}$ | | | | $-\frac{1}{10}$ | $F \to 0^-$ |

b) Para $x \to 2^-$.

| $x$ | 1.1 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | $x \to 2^-$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x)$ | -1.1 | -2 | | | | -10 | $F \to -\infty$ |

**2.** $F(x) = \dfrac{1}{x+1}$

**3.** $F(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$



**Conceptos clave:**

**7. Contradominio de una función**

Se llama **contradominio** de una función al conjunto de valores de donde se obtendrán los que han de asociarse con los elementos del dominio.

**8. Rango de una función**

Se llama **rango** de una función a la parte del contradominio formada por los elementos que realmente se ocupan para asociarlos con los del dominio.

Gráficamente, el **rango** de una función es la parte del eje $Y$ que se ocupa al trazar su gráfica. El **dominio** es la parte del eje $X$ sobre la que se construye la gráfica.

**9. Asíntota de una curva**

Llamaremos **asíntota** de una curva, a una recta a la que la curva se acerca indefinidamente, a medida que $x$ tiende a un cierto valor, sin llegar a tocarla nunca.