FUNCIONES CON RADICALES

Sugerencia para quien imparte el curso.

Al iniciar esta parte del curso es importante tener claro y precisar a los alumnos el hecho de que una expresión radical de segundo orden tiene dos resultados posibles, por lo que, para conservar el carácter de función, en una regla de correspondencia que contenga un radical de ese tipo, deberemos anteponer el signo que consideraremos de la raíz obtenida.

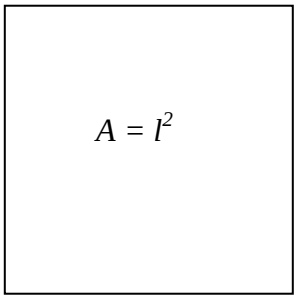
Comentar con los alumnos que al aplicar las Matemáticas, frecuentemente aparecen expresiones con radicales, por lo que es de suma importancia tener un poco de experiencia en su manejo.

Que tendremos oportunidad de reafirmar conceptos como dominio y rango de una función, donde encontraremos marcadas diferencias con respecto a las funciones polinomiales y racionales ya estudiadas.

Así como la oportunidad de utilizar la experiencia obtenida en el manejo de desigualdades.

Continuando con la estrategia habitual, resolución de problemas, se sugiere plantear tres problemas en los que se presentan situaciones que involucran expresiones algebraicas con radicales de segundo orden.

Ejemplo 1



$l = ?$

El problema del cuadrado

Expresar la longitud del lado de un cuadrado en términos de su área.

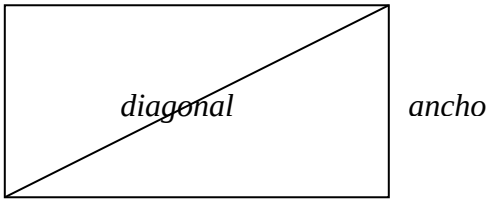
Solicitar a los estudiantes que antes de dar respuesta al problema planteado, llenen la siguiente tabla:

Área	*25*	*100*	*1*	*49*	*12.25*	*x*
lado						

Si $A(l)$ es el área de un cuadrado en función de la longitud del lado, el lado en términos del área se puede expresar como $l = \sqrt{A}$.

¡Ésta es una relación entre dos cantidades, expresada a través de un radical de segundo orden!

Ejemplo 2



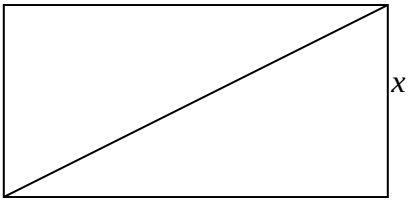
El problema de la diagonal

¿Cómo puede expresarse la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyo perímetro es 10 metros, a partir de su ancho?

Para verificar que se entiende completamente el problema, pedir a los alumnos que completen la siguiente tabla, en la que se colocan el ancho y el largo de una serie de rectángulos cuyo perímetro es ***10 m.***

ancho	*1*	*2*	*3*	*4*	*0.5*	*1.5*	*2.5*
largo	*4*					*3.5*	

Ahora podemos afirmar: si el ancho mide una cantidad x de metros, tendremos un rectángulo cuyas dimensiones se expresan así

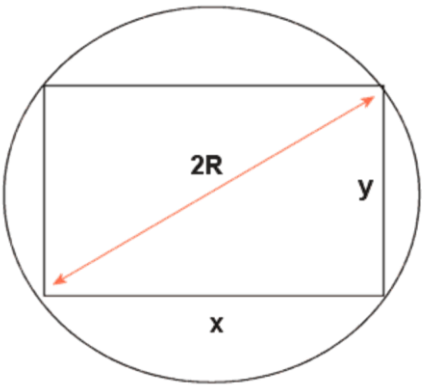


De acuerdo con el Teorema de Pitágoras, la diagonal de este rectángulo se puede expresar $d = \sqrt{(5-x)^2 + x^2}$.

Desarrollando el binomio al cuadrado y reduciendo términos semejantes, tenemos:

$$d = \sqrt{25 - 2x + x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2 - 2x + 25}$$

Ésta es una relación entre dos elementos del rectángulo: ancho (x) y diagonal (d), expresada por medio de un radical de segundo orden.



Ejemplo 3 El problema del rectángulo inscrito

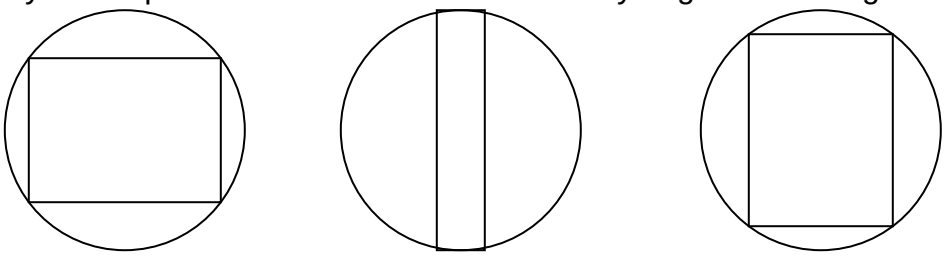
Un pintor, al elaborar un diseño, desea expresar el área del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio $6\ cm$, en términos del ancho del rectángulo.

El pintor acude a un familiar suyo que estudia geometría para que le resuelva el problema. ¿Cómo lo habrías resuelto tú?

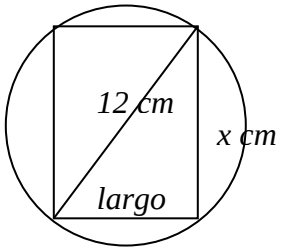
Para familiarizar a los estudiantes con el problema, plantearemos algunas preguntas:

¿Cómo debe trazarse un rectángulo para que esté inscrito en una circunferencia?

Hay varias posibilidades en cuanto al ancho y largo del rectángulo inscrito:



¿Cuánto mide la diagonal de cualquiera de los rectángulos inscritos en una circunferencia de $6\ cm$ de radio?



Si llamamos x al ancho del rectángulo inscrito, podemos utilizar el Teorema de Pitágoras para expresar el largo en términos del ancho x y de la diagonal 12.

$largo = \sqrt{12^2 - x^2}$

Por lo tanto, el área del rectángulo inscrito, puede expresarse en términos del ancho, como quería el artista así:

$$A = x\sqrt{144 - x^2}$$

Esto, nuevamente es una relación entre variables, expresada por medio de un radical.

Existen relaciones importantes que se expresan por medio de radicales, por ejemplo, el período T de un péndulo (tiempo que tarda en hacer una oscilación completa), es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud del péndulo L:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Hacer notar a los alumnos que hasta aquí hemos tenido cuidado de no utilizar la palabra función cuando nos referimos a relaciones que incluyen raíces cuadradas, o radicales de segundo orden.

Dada la relación $R(x) = \sqrt{x}$, cuyo dominio son los números reales no negativos, completar la siguiente tabla:

x	4	4	9	9	1	1	12.25	12.25
$R(x)$	2	-2						

En esta relación, a cada elemento del dominio se le asocian **dos** elementos del contradominio, lo que no está permitido en una función.

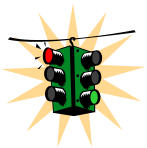
En efecto: $\sqrt{4} = 2$, porque $2^2 = 4$ y también $\sqrt{4} = -2$, porque $(-2)^2 = 4$.

$\sqrt{6.25} = 2.5$, pero también $\sqrt{6.25} = -2.5$

Conducir a los estudiantes a la conclusión de que este "inconveniente" puede resolverse si optamos por un solo valor de la raíz cuadrada, lo que indicaremos escribiendo antes del radical el signo de la única raíz cuadrada que aceptaremos.

De esta manera, las expresiones siguientes sí definen una función:

$F(x) = +\sqrt{x}$, $F(x) = -\sqrt{x-3}$, $F(x) = +\sqrt{5x^2 - 3x + 8}$



Conceptos clave:

1. Una función con radicales es la que contiene en su regla de correspondencia uno o más radicales.

Ejemplo: $F(x) = +\sqrt{x+5}$.

2. Si queremos permanecer dentro de los números reales, un radical de orden par, es decir una raíz cuadrada, cuarta, sexta, etc. sólo puede aplicarse a expresiones no negativas.

Ejercicio 1

Para cada una de las funciones que se definen a continuación, calcular los elementos que se asocian con los elementos del dominio propuestos.

1. $F(x) = -\sqrt{x}$, dominio: [0,10]

x	*1*	*3*	*4*	*9*	*6.8*	π	*10*
F(x)							

2. $F(x) = +\sqrt{x+5}$, dominio: [-5,4]

x	*-5*	*-4*	*-1*	*0*	*1.3*	*2.95*	*4*
F(x)							

3. $F(x) = -\sqrt{4-x}$, dominio: [-5,4]

x	*-5*	*0*	*3*	*-1.5*	*1*	*-0.25*	*4*
F(x)							